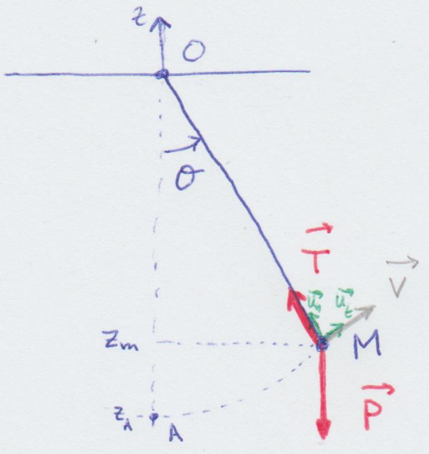
Exercice 1 :

Q1



- système : {M}
- référentiel : terrestre supposé galiléen
- bilan des forces :
  - poids $\vec{P}$
  - tension du fil $\vec{T}$
  - frottements négligés.

Q2 : $E_{pp}(M) = m.g(z_M - z_A) + E_{pp}(A)$

En posant $E_{pp}(A) = 0 \Rightarrow E_{pp}(M) = m.g.(z_M - z_A)$

or $z_m - z_A = \ell - \ell.\cos(\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{E_{pp}(M) = m.g.\ell\,(1 - \cos(\theta))}$$

Q3 : Le système est conservatif car les Frottements (force non conservative) sont négligés et la tension du fil ne travaille pas car elle est toujours orthogonale au mouvement.

Q4 : On lache le pendule d'un point M_0 sans vitesse initiale.
En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(M) - E_m(M_0) = 0 \quad \text{(car système conservatif)}$$

position quelconque — position initiale

$$\big(E_c(M) + E_{pp}(M)\big) - \big(\underbrace{\cancel{E_c(M_0)}}_{0} + E_{pp}(M_0)\big) = 0$$

$$\frac{1}{2}m.v^2 + m.g.\ell.(1-\cos(\theta)) - m.g.\ell.(1-\cos(\theta_0)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{2g\ell\,(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}}$$

Q5 : En $\theta = 0$

$\Rightarrow V(A) = \sqrt{2.g.\ell.(1-\cos(\theta_0))} = \underline{0{,}89\ m.s^{-1}}$

Q6 : • Avec le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{(système conservatif)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m.v^2 + m.g\ell(1-\cos(\theta))\right) = 0$$

En utilisant : $v = \ell.\dot{\theta}$ (mouvement circulaire)

$$\Rightarrow \quad m.\ell^2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m.g.\ell.\dot{\theta}.\sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0}$$

Alternative : Avec le PFD : $\sum \vec{F_{ext}} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}$

Dans le repère de Frenet :

$$\begin{pmatrix} -mg.\cos(\theta) \\ -mg.\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = m.\begin{pmatrix} \frac{v^2}{\ell} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$$

En projetant sur $\vec{u_t}$:

$$m.\frac{dv}{dt} + mg.\sin(\theta) = 0$$

Avec $v = \ell.\dot{\theta}$ on obtient : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0}$

Q7 : Le système est dans un état lié car $\mathcal{E}_{m,1} < \mathcal{E}_{p,p,max}$, où $\mathcal{E}_{pp,max}$ est la hauteur de la barrière de potentiel : le système est donc "piégé" dans un puit de potentiel.

Q8 : • Pour une position d'équilibre $\frac{dE_{pp}}{d\theta} = 0$ (maximums et minimums locaux de la courbe)

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre sont obtenues pour $\theta = k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

• L'équilibre est stable si $\frac{d^2E_{pp}}{d\theta^2} > 0$ (minimum local)

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre stables sont obtenues pour $\theta = k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

• L'équilibre est instable si $\frac{d^2E_{pp}}{d\theta^2} < 0$ (maximum local)

$\Rightarrow$ Les positions d'équilibre instables sont obtenues pour $\theta = \pi + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Avec des Frottements :

Q9 : La Force associée aux Frottements étant non-conservative, le système n'est plus conservatif.

Q10 : Avec le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = -\lambda . v^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m.v^2 + m.g.\ell.(1-\cos(\theta))\right) = -\lambda . v^2$$

Avec : $v = \ell.\dot{\theta}$ (mouvement circulaire)

$$m.\ell^2.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m.g.\ell.\dot{\theta}.\sin(\theta) = -\lambda.\ell^2.\dot{\theta}^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}.\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0}$$

(Possibilité d'utiliser à la place le PFD).

Q11 : Pour des petites oscillations, on peut utiliser l'approximation des petits angles : $\boxed{\sin(\theta) = \theta + o(\theta^2)}$

L'équation devient

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}.\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\theta = 0$$

qui est une équation linéaire classique pour un oscillateur amorti.
On sait la résoudre !