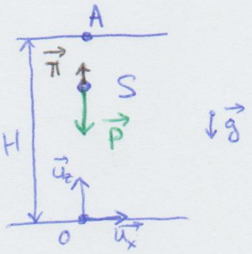
Saut à l'élastique

Partie A

1. 1ère phase

- système : { sauteur + son équipement }
- référentiel : terrestre supposé galiléen
- bilan des forces extérieures :
  - poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$
  - poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\rho . V\vec{g}$



Q32 : $\dfrac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\pi}\|} = \dfrac{m.g}{\rho.Vg} = \dfrac{80,0}{1,3 \times 0,25} = 246 \gg 1 \Rightarrow$ la norme des poids est très supérieure à la norme de la poussée d'Archimède

$\Rightarrow$ $\vec{\pi}$ est négligeable.

Q33 : Principe fondamental de la dynamique pour un système fermé :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} = m.\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}$$

Q34 : Comme $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \cancel{c_1} \; 0 \\ v_z = -g.t + \cancel{c_2} \; 0 \end{pmatrix}$ (conditions initiales sur la vitesse)

Comme $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OS}}{dt} \Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} x(t) = \cancel{c_3} \; 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2} g.t^2 + \cancel{c_4} \; H \end{pmatrix}$ (conditions initiales sur la position)

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + H}$$

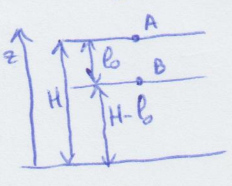
Q35 : $z(t) = -4,9.t^2 + 49,8 \Rightarrow$ identification terme à terme

$\dfrac{1}{2}g = 4,9 \text{ m.s}^{-2} \rightarrow g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

$H = 49,8 \text{ m} \rightarrow H \simeq 50 \text{ m}$

} cohérent.

Q36 : L'élastique se tend quand le sauteur est descendu de 8 m (ℓ_0). Son altitude vaut alors $H - \ell_0$! Appelons B le point où l'élastique se tend :



$$z_B = z(t_B) = -\frac{1}{2}.g.t_B^2 + H = H - \ell_0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_B = \sqrt{\frac{2\ell_0}{g}}} = 1,3 \text{ s}$$

Q37 : $v_B = |v_z(t_B)| = |-g.t_B| = g.\sqrt{\dfrac{2\ell_0}{g}} = \sqrt{2.\ell_0.g} = 12,5 \text{ m.s}^{-1}$

Q38 : Le mouvement est conservatif (frottements négligés).
D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(B) - E_m(A) = 0$$

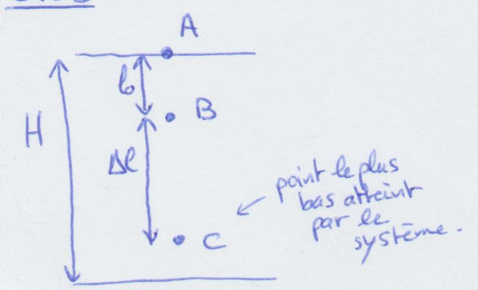
$$E_c(B) + E_{pp}(B) = \underbrace{\cancel{E_c(A)}}_{\text{vitesse initiale nulle.}} + E_{pp}(A)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 + m.g.(H - l_0) = m.g.H$$

$$\hookrightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2\, l_0 . g}}$$ On retrouve l'expression précédente.

2ème phase

Q39



Le mouvement est conservatif donc d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(C) \,(= E_m(B)) = E_m(A)$$

En utilisant le point A et le point C :

$$E_{pp}(C) + E_{pe}(C) + \underbrace{\cancel{E_c(C)}}_{\text{vitesse nulle}} = E_{pp}(A) + \underbrace{\cancel{E_{pe}(A)}}_{\text{élastique non tendu.}} + \underbrace{\cancel{E_c(A)}}_{\text{vitesse initiale nulle.}}$$

$$m.g.(H - l_0 - \Delta l) + \frac{1}{2} k . \Delta l^2 = m.g.H$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} k \Delta l^2 - mg.\Delta l - m.g.l_0 = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\Delta l = \frac{m g \left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{k l_0}{mg}}\right)}{k}}$$ (on garde la racine positive)

$$\Delta l = 45{,}0 \text{ m}$$

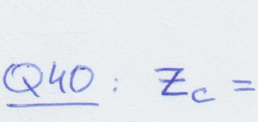
Q40 : $z_C = l_0 + \Delta l = 8 + 45 = 53 \text{ m} > 50 \text{ m}$ $\Rightarrow$ Aille ! Trop long !

Q41 : $F_{max} = k . \Delta l = 1{,}85 \times 10^3 \text{ N} < 12 \text{ kN}$ $\Rightarrow$ le saut n'est pas dangereux de ce point de vue.

PARTIE B

Q42 : $f = \mu . v^2$ $\left.\begin{array}{l} f \text{ en N donc en kg.m.s}^{-2} \\ v^2 \text{ en m}^2.\text{s}^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mu \text{ en kg.m}^{-1}}$

Q43 :
- système : S = {sauteur + équipement}
- référentiel : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces extérieures :
  - poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$
  - frottements : $\vec{f} = -\mu . v . \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\mu . v^2 \end{pmatrix}$ ⚠ $v_z < 0$ donc f vers le haut.



D'après le principe fondamental de la dynamique (système fermé)

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

sur Oz $\hookrightarrow -m.g + \mu . v_z^2 = -m . \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{\mu}{m} v_z^2 = g}$

⚠ $\vec{v}$ vers le bas (composante = − norme), ici v_z est la norme de la vitesse verticale.

Q44 : $\boxed{A = g}$ en $m.s^{-2}$

$\boxed{B = \frac{\mu}{m}}$ en m^{-1} (unité à vérifier avec les unités de l'équa. diff :

$$\underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{m.s^{-2}} + \underbrace{B.v_z^2}_{m.s^{-2}} = \underbrace{A}_{m.s^{-2}}$$

$$B = \frac{0{,}78}{80} = 9{,}8 \times 10^{-3}\, m^{-1}$$

Q45 : Vitesse limite atteinte $\Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = 0$ donc $\frac{\mu}{m} v_{lim}^2 = g \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \sqrt{\frac{m.g}{\mu}}}$

AN : $v_{lim} = 31{,}7\, m.s^{-1}$

Q46 : $dt = 0{,}10$ s

Pour que la méthode d'Euler soit pertinente, il faut que le pas de temps soit petit devant le temps caractéristique d'évolution du mouvement. Intuitivement ce temps caractéristique pour une chute est de quelques secondes. La valeur choisie semble judicieuse.

Complément : équa. diff sous forme adimensionnée :

$$\frac{d\left(\frac{v}{v_{lim}}\right)}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(\frac{v}{v_{lim}}\right)^2 = \frac{1}{\tau}$$

En divisant l'équation de la question Q43 par v_{lim} :

$$\frac{d\left(\frac{v}{v_{lim}}\right)}{dt} + \frac{\mu}{m} \times v_{lim}\left(\frac{v}{v_{lim}}\right)^2 = \frac{g}{v_{lim}} \Rightarrow \tau = \frac{v_{lim}}{g} = \sqrt{\frac{m}{g.\mu}}$$

AN : $\tau = 3{,}2$ s.

On a bien $\Delta t \ll \tau$.

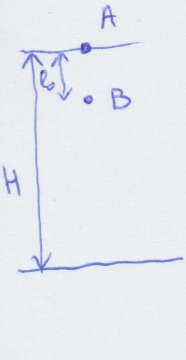
Q47 :

```
t_suivant = t + dt
v_suivant = v + (g - μ/m*v**2) * dt
```

Méthode d'Euler explicite

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{v(t+dt) - v(t)}{dt} = g - \frac{\mu}{m}.v(t)^2 \Rightarrow \boxed{v(t+dt) = v(t) + \left(g - \frac{\mu}{m}.v(t)^2\right).dt}$$

Q48 : Théorème de l'énergie mécanique :



$$E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{f})$$

← force non conservative

$$\left(E_c(B) + E_{pp}(B)\right) - \left(\underbrace{\cancel{E_c(A)}}_{0} + E_{pp}(A)\right) = W_{AB}(\vec{f})$$

$$\hookrightarrow W_{AB}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m.v_B^2 + m.g(H - \ell_0) - m.g.H$$

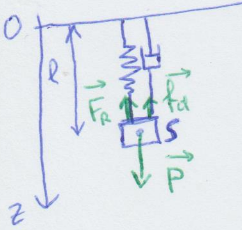
$$\boxed{W_{AB}(\vec{f}) = \frac{1}{2} m.v_B^2 - m.g.\ell_0}$$

AN : $W_{AB}(\vec{f}) = -318$ J (on a bien un travail négatif / résistant)

Oscillations

Q49.

- système : $S = \{$sauteur + équipement$\}$
- référentiel : terrestre supposé galiléen
- Bilan des Forces extérieures :



- Poids : $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ +mg \end{pmatrix}$
- Force de rappel : $\vec{F_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k.(\ell-\ell_0) \end{pmatrix}$
- Force de frottements : $\vec{f_d} = -b.\vec{v}$

A l'équilibre : principe d'inertie $\Rightarrow \sum \vec{F_{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{F_R} + \underbrace{\cancel{\vec{f_d}}}_{\vec{0} \text{ car } \vec{v}=\vec{0}} = \vec{0}$

proj sur Oz $\Rightarrow m.g - k(\ell - \ell_0) = 0$

or $\ell = z'(t) \Rightarrow m.g - k(z'_{eq} - \ell_0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{z'_{eq} = \ell_0 + \frac{m.g}{k}}$

Q50 : Principe fondamental de la dynamique (système fermé) :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m.\vec{a}$$

proj sur Oz $\Rightarrow$ $m.g - k.(z'(t) - \ell_0) - b.\frac{dz'}{dt} = m.\frac{d^2z'}{dt^2}$

En posant $Z(t) = z'(t) - z'_{eq} = z'(t) - (\ell_0 + \frac{m.g}{k}) \Rightarrow z'(t) = Z(t) + \ell_0 + \frac{mg}{k}$; $\frac{dz'}{dt} = \frac{dZ}{dt}$; $\frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}$

$$\boxed{\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dZ}{dt} + \frac{k}{m}Z = 0.}$$ donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $Q = \frac{m.\omega_0}{b}$

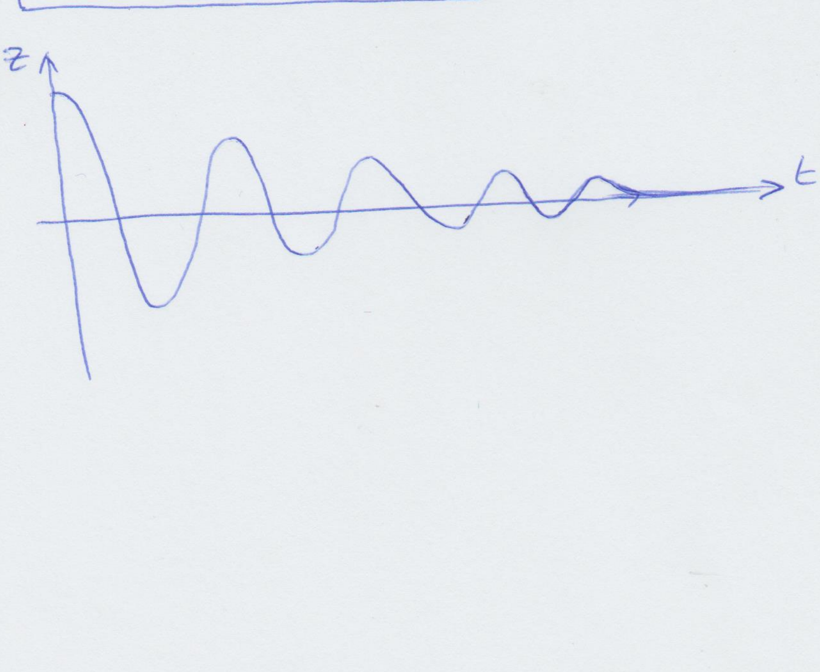
$\Downarrow$

$\boxed{Q = \frac{1}{b}\sqrt{k.m}}$

Q51 : Ce sont des oscillations amorties.
Le régime transitoire est donc pseudo-périodique $\Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Q52 : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Q53 :



régime pseudo-périodique

Q54 : équation caractéristique :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q}x + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right) < 0$$

$$x_\pm = -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{\lambda} \pm i\,\underbrace{\omega_0\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}_{\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z(t) = e^{-\lambda.t}.\left(A.\cos(\Omega t) + B.\sin(\Omega.t)\right)}$$

avec $\begin{cases} \lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega = \omega_0\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right) \end{cases}$

Condition initiale : $Z(0) = Z_0$ donc $\boxed{Z_0 = A}$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\lambda.e^{-\lambda t}.\left(A.\cos(\Omega.t) + B.\sin(\Omega.t)\right) + e^{-\lambda t}.\left(-A.\Omega\sin(\Omega t) + B.\Omega.\cos(\Omega.t)\right)$$

Condition initiale sur la dérivée : $\frac{dZ(0)}{dt} = 0 = -\lambda.A + B.\Omega \Rightarrow \boxed{B = \frac{\lambda.Z_0}{\Omega} = \frac{2Q}{4Q^2-1}}$

Q55 : 4 aller-retours avant stabilisation $\Rightarrow \boxed{Q \simeq 4}$

or $Q = \frac{\sqrt{k.m}}{b} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{k.m}}{Q} = \frac{\sqrt{41 \times 80}}{4} = 14{,}3\ kg.s^{-1}$

Q56 : Pseudo-période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{4Q^2}{4Q^2-1}$$

avec $Q=4$ $\simeq 1 \rightarrow T_p \simeq T_0$

$\boxed{T_p = 8{,}9\ s} \Rightarrow$ Durée des oscillations $= 4.T_p \approx$ 36 s