

Solide en rotation

Plan du cours

1. Description du mouvement d'un solide (cinématique)	1
1.1. Un solide : un ensemble continu de points	1
1.2. Solide en translation	1
1.3. Solide en rotation autour d'un axe fixe	2
2. Boite à outils pour les mouvements de rotation	2
2.1. Le moment d'une force	2
2.2. Le moment cinétique	3
2.3. Théorème du moment cinétique	3
3. PFD pour un solide	4
3.1. Centre d'inertie d'un système	4
3.2. Quantité de mouvement d'un système	4
3.3. PFD pour un solide	4
4. Etude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe	4
4.1. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ	4
4.2. Moment des actions mécaniques extérieures	5
4.3. Théorème du moment cinétique pour un solide	6
4.4. Etude énergétique d'un solide en rotation	6

1. Description du mouvement d'un solide (cinématique)

1.1. Un solide : un ensemble continu de points

Définition : Solide

Un **solide** (sous-entendu : **indéformable**) est un système de points matériels dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

La description du mouvement d'un solide indéformable dans un référentiel $\mathcal{R}$ nécessite 6 coordonnées :

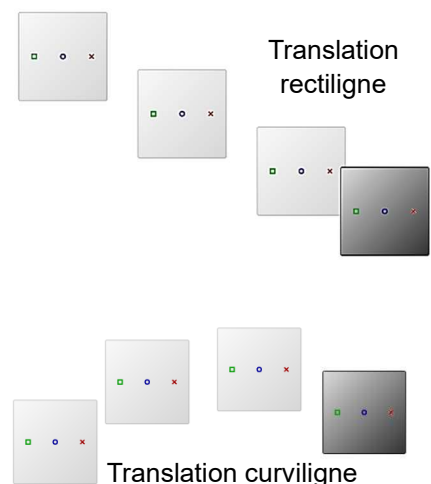
- trois coordonnées d'espace d'un point du solide,
- trois coordonnées angulaires repérant l'orientation du solide par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

1.2. Solide en translation

Définition : Mouvement de translation

Un solide est en **mouvement de translation** si son orientation est fixe au cours du mouvement. On peut formuler ceci de trois façons équivalentes :

- Pour tous points A et B du solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement.
- Au cours du mouvement, les trajectoires de chacun de points du solide sont les mêmes mais décalées les unes par rapport aux autres.
- À chaque instant, quels que soient les points A et B du solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$.



Deux cas particuliers de translations :

- Translation **rectiligne** : lorsque la trajectoire de chaque point du solide est une droite.
- Translation **circulaire** : lorsque la trajectoire de chaque point du solide est un arc de cercle.

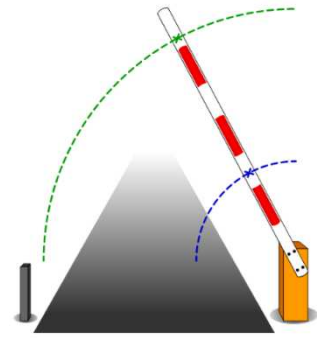
1.3. Solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit Δ un axe fixe.

Un solide est en rotation autour de Δ si la trajectoire de chacun de ses points est un **cercle dont le centre est sur l'axe**.

De façon équivalente : la distance entre un point du solide et l'axe Δ reste constante au cours du temps.



Propriété : Lien entre vitesse angulaire et vitesse d'un point du solide

- On appelle vitesse angulaire le paramètre $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.
- Pour une rotation autour d'un axe fixe, la vitesse angulaire ne dépend pas du point M du solide considéré. On peut parler de LA vitesse angulaire du solide.
- Le vecteur vitesse d'un point M du solide est tangent au cercle décrit par M , de norme $v(M) = r \cdot |\omega|$, avec r la distance à l'axe.

2. Boîte à outils pour les mouvements de rotation

2.1. Le moment d'une force

Définition : Moment vectoriel d'une force en un point

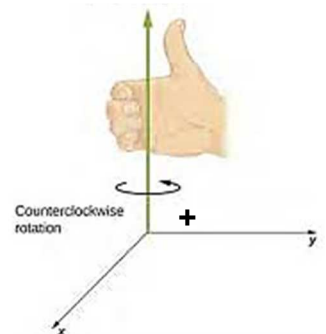
Le **moment vectoriel** de la force $\vec{F}$ appliquée en M , exprimé/calculé au point O est le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ défini par le produit vectoriel de $\vec{OM}$ et $\vec{F}$:

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

La norme de $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ s'exprime en newton-mètre (N.m).

Convention : Axe orienté

Un axe Δ est dit **orienté** lorsqu'il est dirigé par un vecteur $\vec{u}_\Delta$. Ce dernier définit le sens positif pour les plans qui lui sont orthogonaux (**règle de la main droite**).



Définition : Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un axe Δ orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et passant par le point O .

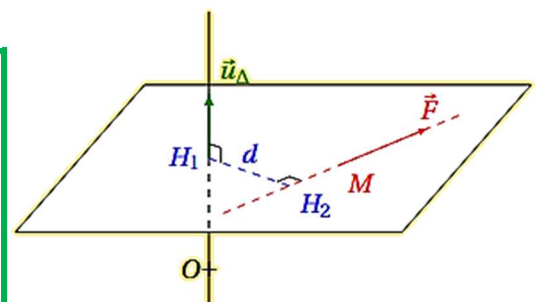
Le **moment scalaire** de la force $\vec{F}$ projeté sur l'axe Δ est la projection du moment vectoriel $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ sur cet axe.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Le moment scalaire $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ s'exprime en newton-mètre (N.m). Il indique comment la force $\vec{F}$ tend à faire tourner le point où elle s'applique autour de l'axe Δ .

Méthode : Utiliser le bras de levier (cas où $\vec{F} \perp \vec{u}_\Delta$)

- Faire un schéma.
- Déterminer à l'aide d'un schéma le **bras de levier** d , c'est-à-dire la distance entre la droite dirigée par la force $\vec{F}$ et l'axe orienté Δ .
- $|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d \cdot \|\vec{F}\|$
- Le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ est donné par la règle de la main droite.



Propriété : Relation de Varignon (H.P.)

La relation de Varignon permet d'exprimer le moment $\vec{\mathcal{M}}_{H_1}(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ en un point H_1 lorsque l'on connaît le moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ de cette même force en un point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_{H_1}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \overrightarrow{H_1O} \wedge \vec{F}$$

2.2. Le moment cinétique**Définition : Quantité de mouvement (rappel)**

Le vecteur *quantité de mouvement* $\vec{p}(M)$ d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$ vaut :

$$\vec{p}(M) = m \cdot \vec{v}(M)$$

Définition : Moment cinétique vectoriel d'un point matériel en un point fixe du référentiel

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)$.

Son **moment cinétique** $\vec{\mathcal{L}}_O$ par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

La norme du moment cinétique s'exprime en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$.

Définition : Moment cinétique scalaire d'un point matériel par rapport à un axe fixe

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$.

Le **moment cinétique scalaire** $\mathcal{L}_\Delta(M)$ de ce point matériel M par rapport à un axe Δ , orienté par un vecteur $\vec{u}_\Delta$ et passant par O , fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la projection sur le vecteur $\vec{u}_\Delta$ du moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ exprimé en O :

$$\mathcal{L}_\Delta(M) = \vec{\mathcal{L}}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_\Delta$$

La moment cinétique scalaire s'exprime en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$.

2.3. Théorème du moment cinétique**Théorème du moment cinétique vectoriel** (exprimé en un point fixe d'un référentiel galiléen)

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique vectoriel d'un point matériel M exprimé en un point fixe O de $\mathcal{R}_g$ est égale au moment vectoriel en O de la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ qui s'exercent sur M :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}_g$ est égale au moment par rapport à l'axe Δ de la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ qui s'exercent sur M :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

3. PFD pour un solide

3.1. Centre d'inertie d'un système

Définition : Centre d'inertie d'un système de points

Le **centre d'inertie** (ou centre de masse) d'un système, noté G , est le **barycentre des masses** du système.

Dans le cas de deux masses m_1 et m_2 situées en M_1 et M_2 , le centre d'inertie vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

où O est l'origine du repère que l'on place où cela nous arrange.

3.2. Quantité de mouvement d'un système

Définition : Centre d'inertie d'un système de points

La **quantité de mouvement** d'un système est la somme des quantités de mouvement de tous ses points.

Propriété : cette quantité de mouvement s'écrit : $\vec{p} = m \cdot \vec{v}(G)$ avec m la masse totale du système, et $\vec{v}(G)$ la vitesse du centre d'inertie du système.

Ainsi pour la quantité de mouvement, tout se passe comme si toute la masse du système était concentrée au point G , avec une vitesse $\vec{v}(G)$.

3.3. PFD pour un solide

Loi : Principe fondamental de la dynamique pour un solide

On considère un solide de centre d'inertie G , de masse totale (constante) m , dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen. Le principe fondamental de la dynamique pour ce solide s'écrit :

$$m \cdot \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

⚠ Seules les forces extérieures interviennent. Les forces internes au système (qu'une partie du système exerce sur une autre partie du système) n'interviennent pas.

➔ Pour le PFD, **tout se passe comme si on avait un point matériel G de masse m** . Le centre d'inertie G est donc le point où est concentrée toute la masse du système pour ce qui concerne le PFD.

4. Etude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

4.1. Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

Définition : Moment cinétique scalaire d'un point matériel par rapport à un axe fixe

On considère un système de points M_i de masses m_i tournant autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω .

- Le **moment cinétique de l'ensemble** par rapport à un axe fixe est donné par la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_i \mathcal{L}_\Delta(M_i)$$

- On peut montrer que le **moment cinétique** $\mathcal{L}_\Delta$ du système par rapport à Δ s'écrit :

$$\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \cdot \omega$$

avec J_Δ le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Δ exprimé en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Définition : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un système de points M_i de masses m_i s'exprime en kg.m^2 et se calcule de la manière suivante (formule Hors Programme) :

$$J_{\Delta} = \sum_i m_i \cdot (OM_i)^2$$

Le **moment d'inertie** rend compte de la difficulté à mettre en rotation le solide (ou à arrêter sa rotation). Il dépend de l'axe par rapport auquel il est défini, de la masse du système, de sa répartition dans le solide et des dimensions.

Remarque : l'expression du moment d'inertie est toujours donnée dans les exercices.

4.2. Moment des actions mécaniques extérieures

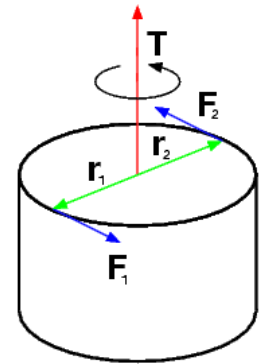
Pour un solide on ne parle plus de force, mais plus généralement d'action mécanique : une action mécanique est caractérisée par un torseur, défini en un point A quelconque par sa résultante $\vec{F}$ (indépendante du point A) et son moment $\vec{T}_A$ en A (voir S.I.).

On distingue les actions mécaniques possédant un point d'application et les couples.

Définition : Couple

Un couple est une action mécanique (ou un ensemble d'actions mécaniques) de **résultante nulle**, mais de **moment non nul**.

Par métonymie, « couple » désignera souvent le moment du couple, et sera noté $\vec{T}$, $\vec{T}$ ou $\vec{C}$ sans besoin de préciser le point considéré. En effet, le moment d'un couple est **indépendant du point par rapport auquel on le calcule**.

**Définition : Liaison pivot parfaite**

- Une **liaison pivot** d'axe Δ entre deux solides S_1 et S_2 est une liaison n'autorisant **qu'une rotation** de S_2 par rapport à S_1 autour d'un seul axe Δ , fixe par rapport à S_1 .
- La liaison pivot d'axe Δ est **parfaite** si les frottements sont négligeables. Alors, le moment scalaire de l'action de contact entre les deux solides projeté sur l'axe Δ est nul :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$$

Méthode : Faire un bilan des actions mécaniques extérieures

1. Je commence par faire un SCHÉMA. J'indique le sens $\oplus$ des moments.
2. Je précise le système étudié et le référentiel d'étude.
3. Je sépare les forces extérieures et les couples extérieures.
 - (a) je fais le bilan des forces extérieures :
 - en précisant leurs points d'application ;
 - en n'oubliant pas la réaction de la liaison pivot.
 - (b) je fais le bilan des couples extérieurs :
 - en n'oubliant pas de préciser si le couple de la liaison pivot est nul (pivot parfait).

4.3. Théorème du moment cinétique pour un solide

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un **solide en rotation** à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ fixe, la dérivée temporelle du moment cinétique $\mathcal{L}_\Delta$ est égale à la somme des moments par rapport à l'axe Δ de chacune des **actions mécaniques extérieures** (force avec point d'application ou couple) qui s'exercent sur le solide :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \frac{d(J_\Delta \cdot \omega)}{dt} = \sum_i \underbrace{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{i,ext}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{\Gamma}_{i,ext})}_{\mathcal{M}_\Delta^{ext}}$$

- Pour un solide indéformable, $J_\Delta = \text{cste}$, et on a alors :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{i,ext}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{\Gamma}_{i,ext})$$

Remarques :

- Ce théorème peut se démontrer en faisant la « somme » du théorème du moment cinétique sur l'ensemble des points du solide.
- En sommant, la somme des moments des forces intérieures s'annule (3^{ème} loi de Newton).

4.4. Etude énergétique d'un solide en rotation

Définition : Energie cinétique d'un point matériel M

L'énergie cinétique E_C d'un point matériel M de masse m et de vitesse $v(M)$ vaut :

$$E_C(M) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(M)$$

Définition : Energie cinétique d'un solide en rotation

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe Δ à la vitesse angulaire ω . Son **énergie cinétique**, exprimée en joule (J), vaut :

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2$$

avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ .

Définition : Puissance et travail d'une action mécanique

Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire de rotation $\omega = \dot{\theta}$.

- S'il est indéformable, la puissance des actions mécaniques intérieures est nulle.
- La puissance d'une action mécanique extérieure s'écrit : $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{M}_\Delta^{ext} \cdot \omega$
- Le travail d'une action mécanique extérieure entre $A(t_A, \theta_A)$ et $B(t_B, \theta_B)$:

$$W_{AB}^{ext} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_{ext} \cdot dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_\Delta^{ext} \cdot d\theta$$

Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un **solide indéformable en rotation** à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ fixe, la **dérivée temporelle de l'énergie cinétique** E_C du solide est égale à la somme des **puissances des actions mécaniques extérieures** qui s'exercent sur le solide :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext} = \sum \mathcal{M}_\Delta^{ext} \cdot \omega$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un **solide indéformable en rotation** à la vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ fixe, la variation de l'**énergie cinétique** E_C du solide entre deux points A et B est égale à la somme des **travaux des actions mécaniques extérieures** qui s'exercent sur le solide :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{AB}^{ext}$$

Remarque : dans le cas où **le solide est déformable**, il faut également prendre en compte la puissance/le travail des forces intérieures au système dans le théorème de la puissance/l'énergie cinétique.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Moment cinétique		
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.	
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.	
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.	
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.	
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers		
Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.	
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.	
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.	
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe		
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.	
Couple.	Définir un couple.	
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.	
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique. <i>Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.</i>	
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen		
Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.	
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.	