Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Plan du cours

Pour aller plus loin : https://femto-physique.fr/mecanique/forces-centrales.php

1. Caractéristiques générales

1.1. Définition et exemples d'une force centrale conservative

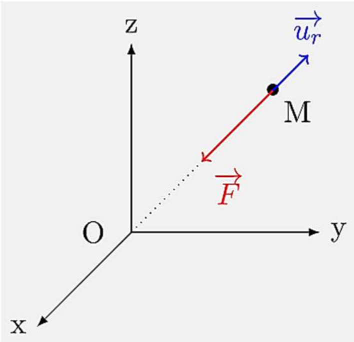
Définition : Champ de force centrale conservatif

- Un point matériel M est soumis à un champ de ***force centrale*** de centre O si, tout au long de son mouvement, la droite d'action de la force qui lui est appliquée passe constamment par O. On a alors :

$$\vec{F} = F.\overrightarrow{u_r}$$

- Une force est dite ***conservative*** si son travail ne dépend pas du chemin suivi. Dans ce cas, la force ***ne dépend que de la position*** du système. Le problème étant à symétrie sphérique de centre O, la force ne dépend que de la coordonnée radiale r.
- Un ***champ de force centrale conservatif*** est de la forme :

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r).\overrightarrow{u_r}}$$



Méthode : 3 exemples de forces centrales conservatives à connaitre

- Force de rappel d'un ressort attaché en O : $\overrightarrow{F_r} = -k.(r - \ell_0).\overrightarrow{u_r}$
- Interaction gravitationnelle : $\overrightarrow{F_G} = -G.\frac{m_O.m_M}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$
- Interaction coulombienne : $\overrightarrow{F_C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_O.q_M}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$

Définition : Force centrale newtonienne

On appelle ***force centrale newtonienne*** les forces de la forme :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$$

- Si la constante K est positive $(K > 0)$, alors la force est ***répulsive*** ;
- Si la constante K est négative $(K < 0)$, alors la force est ***attractive***.

1.2. Étude avec le moment cinétique

Propriété : Conservation du moment cinétique dans un champ de force centrale

Soit M un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservative.

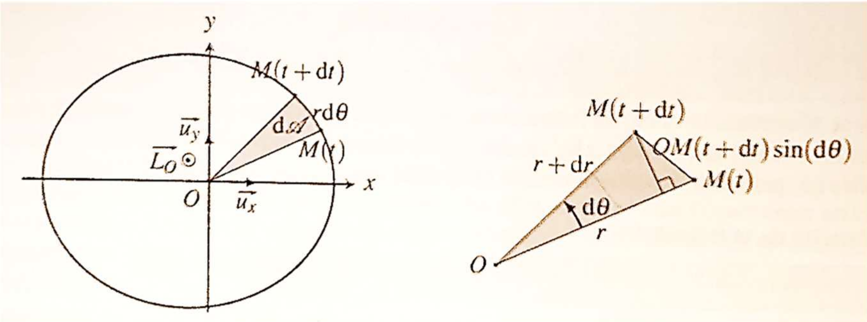
- Par application du théorème du moment cinétique on montre que ***son moment cinétique se conserve***. Le moment cinétique est donc toujours égal à sa valeur initiale $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}$.

Conséquences :

- Le mouvement est inclus dans le plan normal au moment cinétique passant par le centre de force O ;
- L'aire balayée $\mathcal{A}$ par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps, et se fait à la ***vitesse aréolaire*** $d\mathcal{A}/dt$ (en m^2.s^{-1}) ***constante*** :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{\mathcal{L}_0}{2m} = \frac{\mathcal{C}}{2}$$

avec $\mathcal{C} = \mathcal{L}_0/m$ la ***constante des aires***, ne dépendant que des conditions initiales.



L'aire $\Delta\mathcal{A}$ balayée pendant une durée Δt est là même pour toute la trajectoire et vaut :

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2}.\Delta t$$

1.3. Etude énergétique

1.3.1. Rappel sur les forces conservatives

Rappel : Force conservative et énergie potentielle

- Une force est dite ***conservative*** si ***son travail ne dépend pas du chemin suivi***.
- Il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ de la position (repérée par le vecteur $\vec{r}$) telle que son ***travail élémentaire*** vérifie

$$\delta W(\overrightarrow{F_{cons}}) = -d\mathcal{E}p$$

Cette fonction, définie à une constante additive près, est appelée ***énergie potentielle***.

- Son ***travail*** sur un chemin $A \rightarrow B$ s'écrit comme l'opposé de la différence d'énergie potentielle en B et A :

$$W_{AB}\ (\overrightarrow{F_{cons}}) = -\left(\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A)\right) = -\Delta_{AB}\mathcal{E}_p$$

- Réciproquement, ***une force conservative dérive d'une énergie potentielle***

$$\overrightarrow{F_{cons}}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p)$ est le vecteur gradient de l'énergie potentielle.

Définition : Lien entre force centrale conservative et énergie potentielle

Puisque la ***force <u>centrale</u> conservative*** es de la forme $\vec{F}(\vec{r}) = F(r).\overrightarrow{u_r}$, le gradient se simplifie et on peut écrire :

$$F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}$$

où $\mathcal{E}_p(r)$ désigne l'énergie potentielle associée à ce champ de force.

Méthode : Energie potentielle associée à un champ de force centrale newtonienne

$$\overrightarrow{F_{\text{Newton}}} = \frac{K}{r^2}.\overrightarrow{u_r} \implies \boxed{\mathcal{E}_p^{\text{Newton}}(r) = \frac{K}{r}}$$

1.3.2. Conservation de l'énergie mécanique et énergie potentielle effective

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

La force s'appliquant au système est ***centrale*** et ***conservative***. En l'absence de forces non-conservatives, l'***énergie mécanique*** $\mathcal{E}_m$ du système ***se conserve*** :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m.v^2 + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Méthode : Faire le lien avec le mouvement conservatif à 1 degré de liberté (chapitre M4)

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaire, $\vec{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$, on a $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2}$ et l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m.\left(\dot{r}^2 + (r.\dot{\theta})^2\right) + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Cette expression dépend de r et de θ. On peut éliminer $\dot{\theta}$ en utilisant l'expression du moment cinétique $\mathcal{L}_0 = m.r^2.\dot{\theta}$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m.\left(\dot{r}^2 + \left(\frac{\mathcal{L}_0}{m.r}\right)^2\right) + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

On peut alors séparer les termes dépendant de $\dot{r}$ et ceux dépendant de r :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2}m.\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{c,\text{eff}}} + \underbrace{\frac{1}{2}m.\frac{\mathcal{C}^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}} = cste$$

Définition : Lien entre force centrale conservative et énergie potentielle

- L'***énergie potentielle effective*** $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ est définie par :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_p(r) + \frac{1}{2}m.\frac{\mathcal{C}^2}{r^2}$$

  avec $\mathcal{C} = \mathcal{L}_0/m$ la constante des aires, ne dépendant que des conditions initiales.
- Le terme $\mathcal{E}_{c,\text{eff}} = \frac{1}{2}m.\dot{r}^2$ est appelé ***énergie cinétique effective***. Elle ne dépend que de la vitesse radiale $\dot{r}$.
- L'***énergie mécanique*** se conserve dans un mouvement à force centrale conservative, et vaut

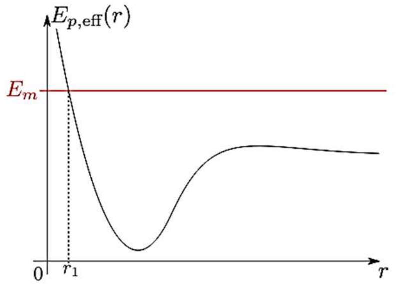
$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{c,eff} + \mathcal{E}_{p,eff} = cste$$

1.4. Nature de la trajectoire : bornée ou ouverte ?

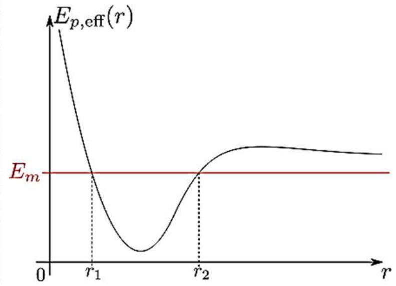
Méthode : Distinction entre mouvement borné et mouvement ouvert

On utilise les outils graphiques mis en place dans le chapitre M4 pour l'études du mouvement d'un système conservatif à 1 degré de liberté.
Pour une allure quelconque de la fonction $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, on distingue :

- Le cas d'un mouvement ***ouvert*** (***état de diffusion***) si l'énergie mécanique initiale est suffisante pour permettre au système de s'éloignement indéfiniment du centre O $(r \to \infty)$.
- Le cas d'un mouvement ***borné*** (***état lié***) si l'énergie mécanique initiale est insuffisante et contraint le système à rester dans un puit de potentiel. Le rayon de la trajectoire reste alors borné entre deux valeurs extrêmes $r_1$et r_2.



Zone accessible : $r \geq r_1$
⇒ mouvement ouvert (ou de diffusion).



Zone accessible : $r_1 \leq r \leq r_2$
⇒ mouvement borné.

2. Application aux planètes et satellites

2.1. Rappel sur la force d'attraction gravitationnelle

Définition : Caractéristiques de la force d'attraction gravitationnelle (rappel)

Soient deux masses : m_{astre} fixe en O et m mobile portée par M.

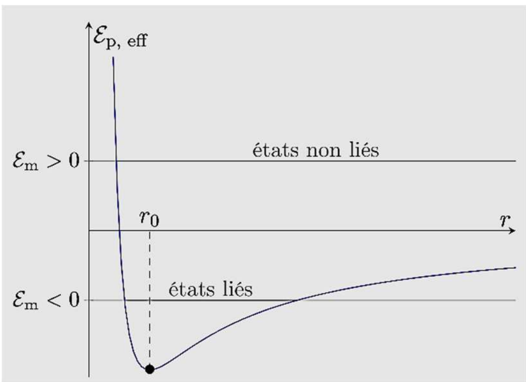
- La masse m subit une force exercée par la masse m_O qui a pour expression :
$$\vec{F} = -G.\frac{m_{astre}.m}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$$
avec $r = OM$ et $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.S.I. la ***constante gravitationnelle***.
- En choisissant $\mathcal{E}_p(r = +\infty) = 0$, l'***énergie potentielle gravitationnelle*** associée vaut :
$$\mathcal{E}_p(r) =$$

Définition : Energie potentielle effective associée à la force d'attraction gravitationnelle

Pour la force d'attraction gravitationnelle, l'énergie potentielle effective dépend de la distance r de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = -G.\frac{m_{astre}.m}{r} + \frac{1}{2}m.\frac{C^2}{r^2}$$

Le profil correspondant est le suivant :

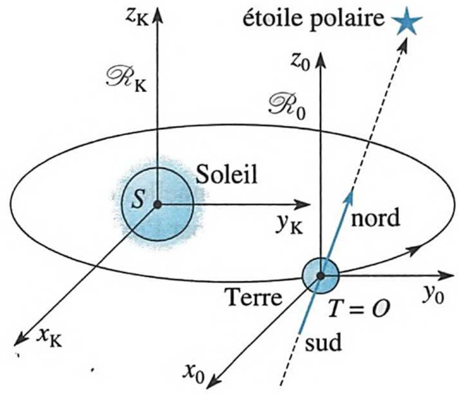


Selon la valeur de l'énergie mécanique du système la trajectoire peut être bornée ($\mathcal{E}_m < 0$) ou ouverte ($\mathcal{E}_m \geq 0$).

2.2. Choix du référentiel

Définition : Quelques référentiels à connaitre

- Le ***référentiel de Copernic***, noté $\mathcal{R}_C$, est un ***référentiel lié au centre de masse du système solaire***, et dont les axes sont dirigés vers 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixe.
- Le ***référentiel héliocentrique*** ou référentiel de Kepler, noté $\mathcal{R}_K$, est un ***référentiel lié au centre du Soleil***, et dont les axes sont dirigés vers 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixe. Il est en translation par rapport au référentiel de Copernic. En pratique, ces deux référentiels sont presque confondus.
- Le ***référentiel géocentrique*** est le ***référentiel lié au centre de la Terre***, en translation par rapport au référentiel héliocentrique.
- Le ***référentiel terrestre*** est le ***référentiel lié à la Terre***. Il est rotation autour de centre de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.



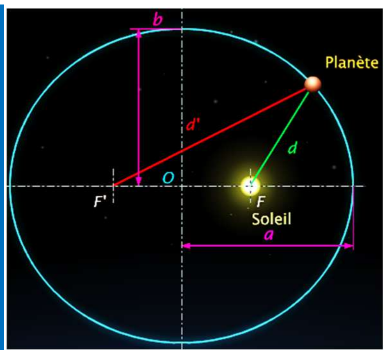
Méthode : Choix du référentiel

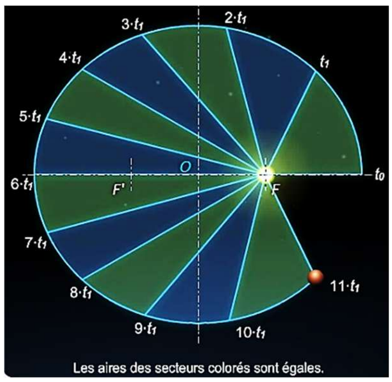
- Pour étudier le mouvement des planètes, des astéroïdes, des comètes, des sondes... bref de tout objet en révolution autour du Soleil, on utilisera le ***référentiel héliocentrique***.
- Pour étudier le mouvement de la Lune et des satellites artificiels, on utilisera le ***référentiel géocentrique***.
- Pour étudier le mouvement d'un objet sur la surface de la Terre, on utilisera le ***référentiel terrestre***.
- Pour tout objet en révolution autour d'un astre, on utilisera, par analogie aux référentiel héliocentrique et géocentrique, un ***référentiel lié au centre de l'astre***, dont les axes sont dirigés vers 3 étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixe.

2.3. Lois de Kepler

Loi : Lois de Kepler

- ***Première loi de Kepler*** (1609) ou ***loi des orbites*** :
  Dans le référentiel héliocentrique, chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe l'un des foyers.
- ***Deuxième loi de Kepler*** (1609) ou ***loi des aires*** :
  Dans le référentiel héliocentrique, l'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnel au temps mis pour la décrire.
- ***Troisième loi de Kepler*** (1618) ou ***loi des périodes*** :
  Dans le référentiel héliocentrique, le carré de la période de révolution sidérale T d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe a de l'ellipse qu'elle décrit :
  $$\frac{T^2}{a^3} = cste$$
- Ces lois sont ***transposables*** pour ***n'importe quel objet en révolution autour d'un astre***. Elles sont également transposables pour une charge électrique ponctuelle en révolution autour d'une charge ponctuelle opposée. On choisira le référentiel approprié.





2.4. Etude des trajectoires circulaires

Propriété : Vitesse le long d'une trajectoire circulaire

Dans le cas d'une ***trajectoire circulaire***, le système parcourt cette trajectoire à la vitesse constante v_c :

$$v_c = \frac{2\pi . r_0}{T} = \sqrt{\frac{G.m_{astre}}{r_0}}$$

où r_0 est le rayon de la trajectoire circulaire, T est la période de révolution et m_{astre} est la masse de l'astre autour duquel orbite le système.

Propriété : Constante de la loi périodes

Le carré de la période de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du rayon r_0 de la trajectoire circulaire qu'elle décrit :

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_{astre}}$$

où m_{astre} est la masse de l'astre autour duquel orbite le système.

On admettra que ce résultat se généralise à n'importe quelle trajectoire elliptique en remplaçant le rayon de la trajectoire circulaire r_0 par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.m_{astre}}$$

Propriétés : Energies pour une trajectoire circulaire

- ***Energie cinétique*** :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m. v_c^2 = G.\frac{m_{astre}.m}{2.r_0}$$

- ***Energie potentielle*** :

$$\mathcal{E}_p = -G.\frac{m_{astre}.m}{r_0} = -2.\mathcal{E}_c$$

- ***Energie mécanique*** :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\mathcal{E}_c = -G.\frac{m_{astre}.m}{2.r_0} < 0 \text{ (état lié → trajectoire bornée)}$$

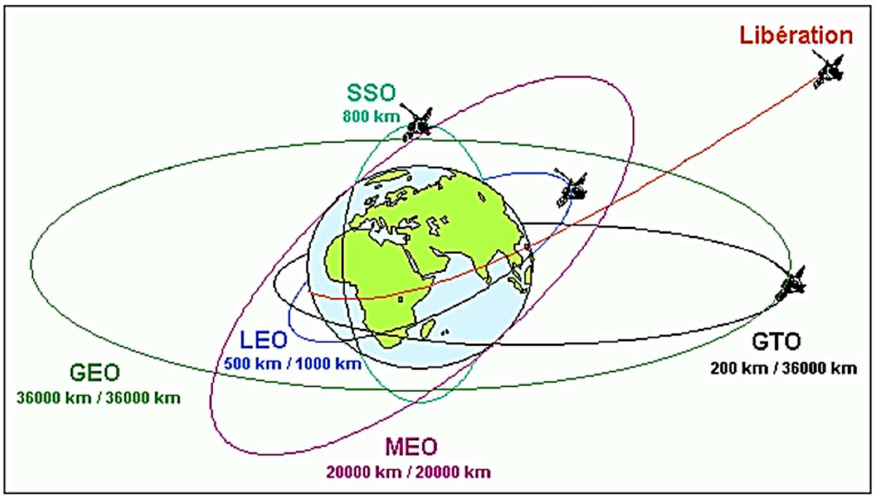
On admettra que ce résultat se généralise à n'importe quelle trajectoire elliptique en remplaçant le rayon de la trajectoire circulaire r_0 par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique : $\mathcal{E}_m = -G.\frac{m_{astre}.m}{2.a}$.

2.5. Satellites terrestres

2.5.1. Leurs différentes missions

Les satellites jouent désormais un rôle important à la fois sur les plans économiques (télécommunications, positionnement, prévision météorologique), militaires (renseignement) et scientifiques (observation astronomique, microgravité, observation de la Terre, océanographie, altimétrie).
Selon l'association UCS (Union of Concerned Scientists), environ 2 000 satellites opérationnels étaient en orbite autour de la Terre au 1er avril 2019.

La mission du satellite définit son orbite :



- 64 % des satellites sont envoyés en **orbite basse** (**LEO** : Low Earth Orbit, située entre 500 et 1.000 kilomètres d'altitude et **SSO** : Sun Synchronous orbit à 800 kilomètres). Ces orbites sont utilisées notamment pour les systèmes de télécommunication, d'imagerie terrestre ou de météorologie
- 27 % des satellites naviguent sur une **orbite géostationnaire** (**GEO** : à 36.000 kilomètres d'altitude). Elle sert notamment pour la météo ou les services de communication comme la télévision, le satellite restant à tout moment au-dessus du même point. L'orbite GTO (Orbite de Transfert Géostationnaire) est l'orbite qui permet d'amener les satellites sur l'orbite GEO.
- Le reste est sur une **orbite moyenne** (**MEO**: Medium Earth Orbit, située entre 2.000 et 36.000 kilomètres), servant essentiellement aux satellites de localisation.
- Une minorité s'échappe de l'orbite terrestre (libération) pour aller explorer l'Univers.

Source : https://metiers-du-spatial.com/missions/

2.5.2. Les satellites géostationnaires

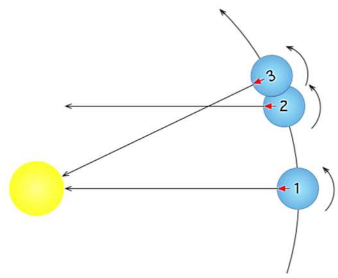
Propriété : Mouvement d'un satellite géostationnaire

Dans le référentiel géocentrique, un satellite géostationnaire suit une ***trajectoire circulaire et uniforme dans le plan de l'équateur*** à une ***altitude*** $\mathrm{h} = 36\,000$ km avec une période de $T_{sidéral}$ = 23 h 56 min 4 s.

Définition : Jour sidéral

Un ***jour sidéral*** est la durée que met une planète pour faire un tour sur elle-même, indépendamment de sa révolution autour de son étoile.

Le jour sidéral terrestre dure un petit peu plus de 23 h 56 min 4 s. C'est en raison de la révolution de la Terre autour du Soleil en même temps qu'elle tourne sur elle-même que le ***jour solaire*** dure quelques minutes de plus, soit vingt-quatre heures en moyenne.



AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif		
Conservation du moment cinétique.	▪ ***Établir*** la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. ▪ ***Établir*** les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.	**SF1**
Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	▪ Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. ▪ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. ▪ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. ▪ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. ▪ *<u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.*	**TP25**
Cas particulier du champ newtonien		
Lois de Kepler.	▪ Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.	
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	▪ ***Établir*** que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. ▪ ***Établir*** la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. ▪ Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.	**SF2**
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	▪ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. ▪ Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.	**SF3**
Satellites terrestres		
Satellites géostationnaires, de localisation et de navigation, météorologique.	▪ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. ▪ *Déterminer* l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.	**SF4**