

Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

Travaux Dirigés

Méthodologie : Comment travailler les exercices ?

Avant la séance de TD :

- Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions.

Après la séance de TD :

- Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

En autonomie

Cahier d'entraînement : pas d'exercice sur ce chapitre.

Savoir-faire

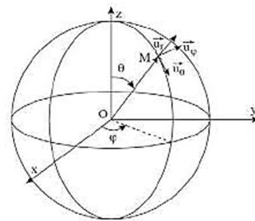
Savoir-faire 1 – Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et en déduire les conséquences.

On considère un point M de masse m soumis à un champ de force centrale $\vec{F}$, de centre O .

Q1. Montrer que le moment cinétique en O est conservé au cours du mouvement. On utilisera les coordonnées sphériques de centre O .

Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est porté par $\vec{u}_z$.

Q2. Montrer qu'à tout instant, $\vec{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{L}_O$ et donc à $\vec{u}_z$. En déduire que le mouvement est dans le plan (xOy) .



On utilise les coordonnées polaires dans le plan (xOy) (vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$).

Q3. Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $C = r^2 \cdot \dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement. Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?

Savoir-faire 2 – Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période.

Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire (rayon r_0).

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg sa masse.

On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q1. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire que la norme du vecteur vitesse (ou la vitesse angulaire) est constante.

Q2. Donner l'expression de la norme v de la vitesse sur l'orbite, puis de la période du mouvement, en fonction du rayon R , de la masse de la Terre M_T et de la constante G .

Savoir-faire 3 – Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.

Dans la suite, le satellite est en orbite basse, donc à une altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) $h > R_T$. Sa distance au centre de la Terre O est donc $r_0 = R_T + h$.

Q3. Calculer sa période de révolution autour de la Terre.

Q4. Calculer également sa vitesse. Cette vitesse, qui est celle nécessaire à la mise en orbite d'un objet à altitude nulle, est appelée « première vitesse cosmique ». Ceci s'applique pour les satellites assez bas, comme par exemple l'ISS ($h = 400$ km).

Q5. Énergie mécanique : donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G , M_T , m et r_0 , et montrer qu'elle est bien négative.

Q6. En bonus : Par un bilan énergétique, déterminer la vitesse que doit avoir une fusée pour échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre. Cette vitesse est appelée « seconde vitesse cosmique » ou vitesse de libération.

Savoir-faire 4 – Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire, dont on note R le rayon.

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg sa masse.

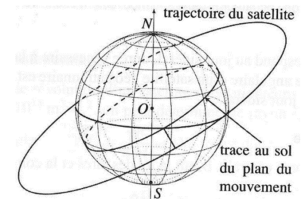
On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

On considère un satellite géostationnaire.

Q1. Expliquer en quoi « géostationnaire » consiste, et quel type d'orbite cela implique (en termes de forme, de localisation et de période).

Q2. Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R , de la masse de la Terre M_T et de la constante G . On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite.

Q3. En déduire la distance R , puis l'altitude h par rapport au sol.



Exercices incontournables

Exercice 1 : Comète de Halley (★ ★ ★)

La comète de Halley est la plus connue des comètes. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen-Âge ... évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061. On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0,59$ unités astronomiques.

Données :

- Une unité astronomique correspond à la distance moyenne Terre-Soleil, soit $1,5 \cdot 10^{11}$ m ;
- Masse solaire $m_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg.

Q1. Faire un schéma de la trajectoire indiquant la position du Soleil et $d_{\min}$.

Q2. Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance au Soleil de la comète.

Une conique est décrite par une équation polaire de la forme $r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cdot \cos(\theta)}$ où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique.

Q3. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

Exercice 2 : Quelques caractéristiques de la planète Mars (★ ★ ★)

Dans tout cet exercice, les orbites sont supposées circulaires.

Données : distance Soleil-Terre : $R_1 = 1,50.10^8$ km ;

- Q1. Sachant que la période de révolution de Mars autour du Soleil est 1,9 ans, calculer sa distance moyenne au Soleil.
- Q2. On dit que la Terre et Mars sont en opposition lorsque le Soleil, la Terre et Mars sont approximativement alignés dans cet ordre (Mars est supposée être dans le plan de l'écliptique). Quelle est la période de ce phénomène ?
- Q3. Lors de l'opposition, on voit Mars sous un diamètre apparent de 18,2 secondes d'arc ; calculer son diamètre en kilomètres.
- Q4. On connaît deux satellites naturels de Mars. L'un d'eux, Deimos, gravite à $r = 24000$ km de la planète, sur une orbite sensiblement circulaire, avec une période $T = 30$ h 20 min. Calculer la masse de Mars, ainsi que sa masse volumique moyenne.
- Q5. Calculer le rapport masse de Mars/masse de la Terre.

Exercice 3 : La mission Mars Science Laboratory (★ ★ ★)

Le lancement du robot Curiosity de la mission Mars Science Laboratory (MSL) a eu lieu le samedi 26 novembre 2011. Il s'est posé sur le sol martien le 6 août 2012. Ce robot transporte du matériel scientifique destiné à l'analyse de la composition du sol et de l'atmosphère martienne. Le but de cet exercice est d'évaluer les conditions à respecter sur les positions relatives de la Terre et de Mars lors du lancement du robot Curiosity.

Données :

- distance Soleil-Terre : $R_1 = 1,50.10^8$ km ; distance Soleil-Mars : $R_2 = 2,28.10^8$ km ;
- période de révolution de Mars autour du Soleil : 1,88 an ;
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻² ;
- masse du Soleil $M_S = 1,99.10^{30}$ kg.

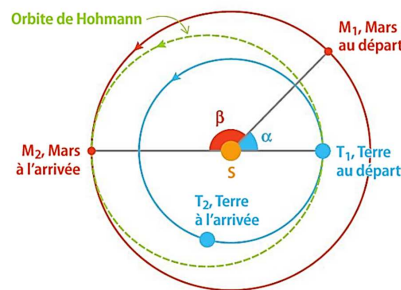
Document : Orbite de Hohmann

Dès les années 1920, Walter Hohmann étudie la manière la plus économique en énergie pour se rendre d'une planète à une autre.

Pour un voyage interplanétaire entre la Terre et Mars, la trajectoire du vaisseau est une ellipse de centre O. On appelle cette ellipse de demi grand axe a l'orbite de Hohmann. Le périhélie P (point le plus proche du Soleil) est sur l'orbite de la Terre et l'aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) sur celle de Mars. Pour simplifier, les orbites de Mars et de la Terre autour du Soleil sont considérées comme circulaires et contenues dans le même plan.

Pour que ce voyage interplanétaire soit réussi, il faut d'abord que le vaisseau échappe à l'attraction de la Terre, puis qu'il utilise l'attraction du Soleil pour rejoindre le voisinage de Mars en empruntant une orbite de transfert, dite orbite de Hohmann. Dans l'étape finale c'est l'interaction gravitationnelle avec Mars qui doit être prépondérante pour que Curiosity puisse se poser sur son sol.

d'après <http://accres.ens-lyon.fr>



- Q1. Indiquer les différentes phases du voyage de la mission MSL ?
- Q2. Sur le schéma en annexe repasser en couleur le chemin suivi par MSL et indiquer les distances R_1 et R_2 introduites dans les données. Montrer que la valeur du demi-grand-axe de l'orbite de Hohmann est $a = 1,89 \times 10^8$ km.

- Q3. En considérant une trajectoire circulaire puis en généralisant aux trajectoires elliptiques, montrer que la troisième loi de Kepler permet d'écrire $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ où a est le demi grand axe de l'ellipse, T la période pour parcourir la totalité de l'ellipse, G la constante de gravitation universelle et M_S la masse du Soleil.
- Q4. Exprimer la durée Δt du voyage de Curiosity en fonction de a , G et M_S et vérifier l'homogénéité de cette relation par une analyse dimensionnelle.
- Q5. Calculer la durée Δt . Commenter le résultat obtenu par rapport à la durée de la mission.
- Q6. Déterminer la valeur de l'angle α qui repère la position de Mars au départ, condition nécessaire à la réussite de la mission.

Exercice 4 : Astéroïde géocroiseur (★ ★ ★)

Les astéroïdes dont l'orbite s'approche de celle de la Terre sont nommés géocroiseurs.

Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent par frottement dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes. S'ils sont plus proches encore, ils peuvent donner lieu à un impact avec la Terre.

On considère ici un astéroïde de masse m , initialement très éloigné de la Terre (masse M_T) et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_0$.

Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée paramètre d'impact.

Cependant, lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle périhélie le point P de cette trajectoire la plus proche du centre de la Terre à distance r_P . L'astéroïde a alors une vitesse v_P . La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression de la distance d'approche r_P en fonction de paramètres connus de l'orbite lointaine (b et v_0).

- Q1. Justifier que l'énergie mécanique de l'astéroïde est une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P , en établissant une relation entre r_P , v_P et v_0 .
- Q2. Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde par rapport à O est également une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P en établissant une seconde relation entre r_P , v_P , b et v_0 .
- Q3. En déduire l'expression de la distance minimale d'approche r_P en fonction de b et v_0 .
- Q4. Le système de surveillance de la NASA vient de détecter un astéroïde de vitesse estimée à $v_0 = 2,0$ km/s et de paramètre d'impact $b = 1,0.10^5$ km. Doit-on s'attendre à une collision ? À des étoiles filantes ? La hauteur de l'atmosphère est d'environ 10 à 100 km.

