Cinématique du point en coordonnées cartésiennes

La cinématique est l'étude du mouvement ***indépendamment*** des causes qui le provoque.

Plan du cours

1. Le système

Le ***système*** désigne le corps étudié.
Tout ce qui n'est pas le système est qualifié d'extérieur.

Pour simplifier, on assimilera dans les premiers chapitres de mécanique le système à un point matériel, noté M, ayant la même masse que l'ensemble du système et situé au centre d'inertie (défini comme le barycentre des masses du système).

2. Référentiels d'observation

2.1. Repère de temps

Pour se repérer dans le temps, il faut :

- Un instant d'origine : $t = 0$;
- Une orientation : sens des temps croissants.
- Une unité de temps : la seconde *s ;*

2.2. Repère d'espace

Pour se repérer dans l'espace, il faut :

- Un point d'origine O
- Une unité de distance : le mètre *m*
- Des vecteurs définissant des directions (deux en 2D, trois en 3D)

2.3. Définition d'un référentiel

📖 *Définition*

On appelle référentiel $\mathcal{R}$, lié à un solide (S) de référence, l'association d'un repère d'espace, lié à (S), et d'un repère de temps.

Illustration : Référentiel du laboratoire, référentiel terrestre, référentiel géocentrique, référentiel héliocentrique, etc.

Le mouvement d'un objet dépend du choix du référentiel. Avant d'aborder un problème de mécanique, dire systématiquement dans quel référentiel on travaille !

Application 1 Même mouvement dans deux référentiels.

Décrire le mouvement du casque d'un cycliste et de la valve d'une de ses roues dans le référentiel du sol (ce que voit quelqu'un à l'arrêt sur le côté de la route) et dans le référentiel lié au cycliste (ce que voit le cycliste).

2.4. Hypothèse forte associée au modèle

On suppose que les valeurs mesurées pour les distances et pour les durées sont indépendantes du référentiel : le temps et les distances ont un caractère absolu.

Cette hypothèse associée à la *mécanique classique* est mise en défaut quand :
- les vitesses deviennent élevées (à partir de 1/3 de la vitesse de la lumière dans le vide environ) ;
- les forces de gravitation deviennent trop importantes.

Dans le premier cas, il faut avoir recours à la théorie de la relativité restreinte, dans le second cas, à la théorie de la relativité générale.

3. Outils pour décrire le mouvement

3.1. Vecteur position

- La position d'un point M à un instant $\boldsymbol{t}$ désigne l'endroit où celui-ci se trouve par rapport à l'origine du repère. Le vecteur position se note $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

- L'ensemble des points occupés successivement par le point M au cours du temps constitue la ***trajectoire*** de ce point. Elle dépend du référentiel.

3.2. Vecteur vitesse

La vitesse du point *M* correspond à la variation de sa position par unité de temps :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{OM}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}) - \overrightarrow{OM}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} \right)_{\mathcal{R}}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}$$

- Le vecteur vitesse correspond donc à la dérivée de la position par rapport au temps.
- La direction de la vitesse est tangente à la trajectoire du système.
- Son sens indique dans quel sens est parcourue la trajectoire.
- La valeur de la vitesse est donnée par la norme du vecteur et s'exprime en m.s^{-1}.
- Par définition, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}$ est tangent à la trajectoire au point *M*.

3.3. Vecteur accélération

L'accélération du point *M* correspond à la variation de sa vitesse par unité de temps

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{M/\mathcal{R}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}) - \overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} \right)_{\mathcal{R}}$$

d'où

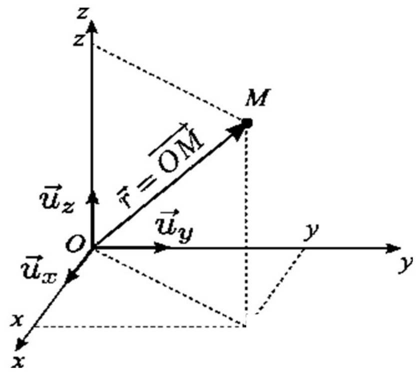
$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}}$$

- Le vecteur accélération correspond à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.
- La valeur de l'accélération est donnée par la norme du vecteur et s'exprime en m.s^{-2}.

Remarques : *on note parfois la dérivée par rapport au temps avec un point au-dessus de la variable qui est dérivée. Par exemple :* $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$*. Deux points signifient que l'on considère la dérivée seconde :* $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$*.*

4. Coordonnées cartésiennes

4.1. La base cartésienne



On définit un repère orthonormée direct (O; $\vec{u}_x$; $\vec{u}_y$; $\vec{u}_z$).
Le vecteur position s'exprime alors par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y + z(t).\vec{u}_z$$

(x; y; z) sont appelés coordonnées cartésiennes du point *M*.

Remarques : *La notation $x(t)$ indique que ces coordonnées peuvent dépendre du temps.*
Les coordonnées pourront être notées de la façon suivante : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

4.2. Déplacement élémentaire

Le déplacement élémentaire est le déplacement infiniment petit $\overrightarrow{d\ell}$ réalisé lors d'un temps infiniment court $\boldsymbol{dt}$.
Ce déplacement élémentaire entre $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t + dt}$ correspond dans ce cas précède à $d\overrightarrow{OM}$.
Dans la base cartésienne le déplacement élémentaire se décompose de la façon suivante : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = dx(t).\vec{u}_x + dy(t).\vec{u}_y + dz(t).\vec{u}_z$ où dx, dy et dz sont les déplacements élémentaires sur chacun des axes. On peut le noter également :

$$d\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} dx(t) \\ dy(t) \\ dz(t) \end{cases}$$

4.3. Vecteur vitesse

Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont :

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

La valeur de la vitesse est donnée par la norme du vecteur : $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$.

4.4. Vecteur accélération

Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération sont :

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ a_z(t) = \dfrac{dv_z(t)}{dt} = \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$

La valeur de l'accélération est donnée par la norme du vecteur $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

Application 2 Mouvement classique.

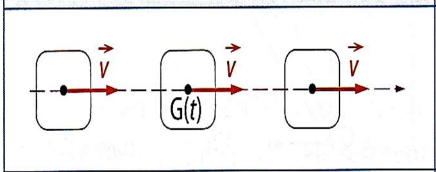
On considère un mouvement pour lequel $\boldsymbol{x(t)} = 0, \quad \boldsymbol{y(t)} = \boldsymbol{a.t}, \quad \boldsymbol{z(t)} = -\frac{1}{2}.\boldsymbol{g}.\boldsymbol{t^2} + \boldsymbol{b.t}.$

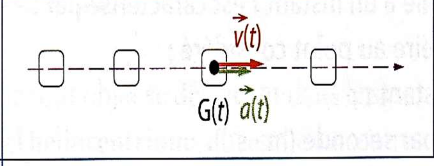
Q1. En déduire les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

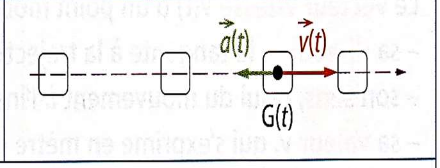
Q2. Trouver l'équation de la trajectoire z(y).

Q3. Tracer l'allure de cette trajectoire. Tracer quelques vecteurs vitesses et vecteurs accélérations en différents points de la trajectoire.

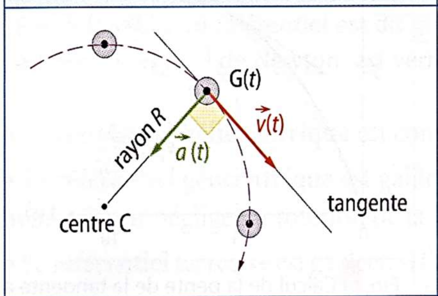
5. Quelques exemples

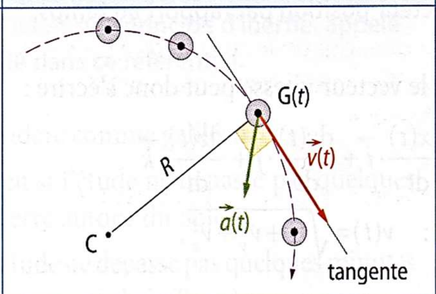


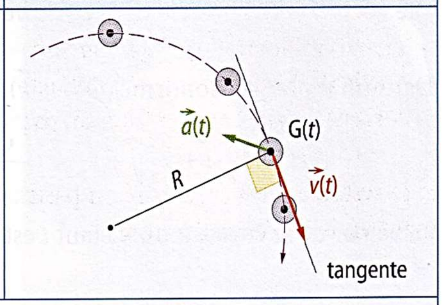




Mouvement rectiligne uniforme	Mouvement rectiligne uniformément accéléré	Mouvement rectiligne uniformément ralenti
Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est constant au cours du temps : $\vec{v}(t) = \vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}}$. $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de même sens. La valeur de v augmente. $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont de sens opposés. La valeur de v diminue. $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.







Mouvement circulaire uniforme	Mouvement circulaire uniformément accéléré	Mouvement circulaire uniformément ralenti
Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ varie mais sa valeur v reste constante. Le vecteur accélération $\vec{a}$ est dirigé vers le centre de la trajectoire. $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Il est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire. La valeur de la vitesse v augmente. $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$.	Le vecteur accélération est constant au cours du temps : $\vec{a}(t) = \vec{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Il est toujours dirigé vers l'intérieur de la trajectoire. La valeur de la vitesse v diminue. $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Au programme

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.	Section 2.4
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes.	Section 4 du cours. Exercices 1 à 7.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	Exercices 5 et 7.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. ***Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.***	Acitivité Centrifugeuse. TP4