Cinématique du point
Travaux dirigés

« Tous ici te le diront, tous ceux qui courent. On s'en fout de battre les autres de 10 cm ou d'1 km, ce qui compte c'est gagner. »
Dominic Toretto (Fast and Furious)

En autonomie

Cahier d'entrainement : fiche 10.

Savoir-faire

Savoir-faire 0 – Savoir manipuler des vecteurs

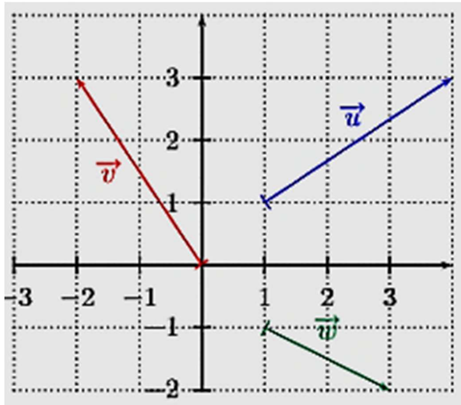
Q1. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}$, du vecteur $\vec{v}$ et du vecteur $\vec{w}$.

Q2. Donner la norme du vecteur $\vec{u}$, du vecteur $\vec{v}$ et du vecteur $\vec{w}$.

Q3. Construire le vecteur $\vec{a} = \vec{v} + \vec{w}$ puis donner ses coordonnées. Quelle est sa norme ?

Q4. Construire le vecteur $\vec{b} = \vec{u} - \vec{w}$ puis donner ses coordonnées. Quelle est sa norme ?

Q5. Construire le vecteur $\vec{c} = 2.\vec{v} + 3.\vec{w}$ puis donner ses coordonnées. Quelle est sa norme ?



Savoir-faire 1 – Choisir un système de coordonnées adapté au problème

Pour chaque cas ci-dessous, choisir le meilleur repère (cartésien, polaire ou cylindrique) pour décrire le mouvement. Préciser l'origine choisie.




Savoir-faire 2 – Établir les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes

On se place dans un repère en coordonnées cartésiennes.

Q1. Faire un schéma du repère. Placer un point M de coordonnées x, y, z.

Q2. Donner les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$.

Q3. Schématiser puis exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ dans ce repère. Retrouver alors l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Savoir-faire 3 – Exprimer les vecteurs vitesse et position en fonction du temps pour un mouvement à accélération constante

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90\ \mathrm{km.h^{-1}}$ sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a_0 = 4{,}2\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Q1. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps.

Q2. En déduire l'évolution de la position de la voiture en fonction du temps.

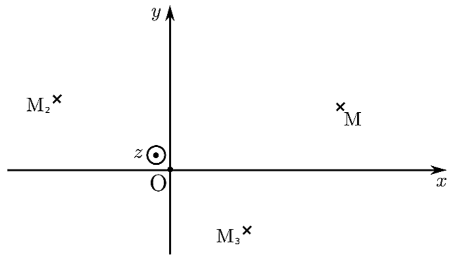
Q3. Exprimer puis calculer la durée et la distance de freinage.

Savoir-faire 4 – Utiliser les coordonnées polaires

Q1. Pour chaque point M du schéma, dessiner les vecteurs de la base $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$.

Q2. Quelle est l'expression du vecteur position en fonction des vecteurs de la base polaire et des coordonnées polaires ?

Q3. Établir l'expression des vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction de $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et θ.



Savoir-faire 5 – Établir les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cylindriques

On reprend le SF précédent.

Q1. Exprimer $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$.

Q2. En déduire les expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ dans le repère polaire.

Q3. Schématiser puis exprimer le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ dans ce repère. Retrouver alors l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$.

Q4. Comment sont modifiées les expressions des différents vecteurs dans un repère cylindrique ?

Savoir-faire 6 – Retrouver et utiliser les expressions des grandeurs vectorielles du mouvement pour un mouvement circulaire

On considère un disque 33 tours et un point M à la périphérie du disque (à une distance R du centre du disque).

Q1. Choisir un repère adapté à l'étude du problème. Faire un schéma.

Q2. Exprimer le vecteur position, vitesse et accélération du point M dans le repère de coordonnées polaires.

Q3. Exprimer le vecteur accélération en fonction de $\|\vec{v}\|$, R et des vecteurs de la base polaire seulement.

Q4. Lorsque le disque tourne en régime permanent, comment se simplifient ces expressions ? Comment qualifier ce mouvement ?

Savoir-faire 7 – Utiliser le repère de Frenet

(d'après ***M.Melzani)***

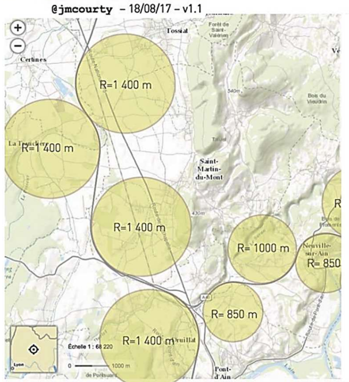
On considère usuellement qu'une voiture ne dérape pas si l'accélération qu'elle subit dans une courbe ne dépasse pas $\mu . g$, avec g la norme de l'accélération de la pesanteur et μ un coefficient numérique. Pour avoir une certaine marge de sécurité, on prend $\mu = 0{,}12$.

Q1. En déduire le rayon à donner à un virage d'autoroute sur une portion limitée à 130 km/h. Puis à 110 km/h.

Q2. Vos résultats sont-ils en accord avec l'analyse graphique ci-contre ?

Carte : https://www.geoportail.gouv.fr/

@jmcourty – 18/08/17 – v1.1



Mesure : Autoroute A40 — Section à 130 km/h : rayon = 1 400 m ; Section à 110 km : rayon > 850 m

Exercices incontournables

Exercice 1 : Vitesse et accélération

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a_0}.\boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{v_0}.\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{z_0} \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{x_0} = 1$ m, $\boldsymbol{z_0} = -1$ m, $\boldsymbol{a_0} = 2$ m.s^{-2}, $\boldsymbol{v_0} = 3$ m.s^{-1}.

Q1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.

Q2. Calculer la norme de la vitesse de M à la date t = 2s.

Q3. Calculer la norme de l'accélération de M à la date t = 1s.

Exercice 2 : Un peu de balistique

On étudie le mouvement d'un projectile supposé ponctuel dont la position M est repérée dans un repère cartésien par ses coordonnées $(x; y; z)$.
Le mobile se trouve initialement à l'origine du repère, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = \mathrm{v_0}.\cos(\alpha)\ .\vec{u}_x + \mathrm{v_0}.\sin(\alpha)\ .\vec{u}_z$, et subit durant l'ensemble de son mouvement une accélération uniforme $\overrightarrow{a_0} = -g.\vec{u}_z$ où $\vec{u}_x$ repère la direction horizontale et $\vec{u}_z$ la direction verticale ascendante ; $\boldsymbol{g}$, $\mathbf{v_0}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ sont des constantes positives.

Q1. Déterminer les équations horaires des coordonnées de M dans le repère (O; $\vec{u}_x$; $\vec{u}_y$; $\vec{u}_z$). De quel type de mouvement s'agit-il ?

Q2. Déterminer l'équation de la trajectoire $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$.

Q3. Déterminer la portée de tir c'est à dire la distance du point de tir à laquelle le mobile retombe dans le plan horizontal du départ.

Q4. Pour quelle valeur de $\boldsymbol{\alpha}$ cette portée est-elle maximale si $\mathbf{v_0}$ est fixé ?

Q5. Déterminer la hauteur maximale (la flèche) atteinte pour un projectile tiré avec un angle $\boldsymbol{\alpha}$.

Exercice 3 : Cinématique en coordonnées cylindriques

On considère une voiture qui parcourt une rampe d'accès à un parking, qui permet d'accéder aux différents étages. Cette rampe est hélicoïdale, c'est-à-dire que la distance entre l'axe du parking et une voiture qui parcourt la rampe reste constante égale à $\boldsymbol{R}$ = 30 m, et l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ entre la route et l'horizontale est constant.

De plus, la voiture roule à vitesse constante $\boldsymbol{v_0}$. On décrit la voiture par un point M.

Q1. Quel système de coordonnées est-il judicieux d'utiliser ?

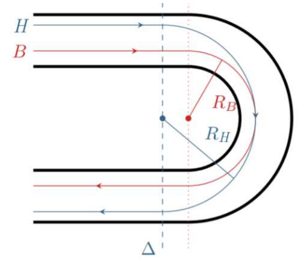
Q2. Donner les expressions de $z(t)$ et de $r(t)$ dans ce système de coordonnées (on supposera la vitesse selon z donnée, par exemple v_z = 1,5 m.s^{-1}).

Q3. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ de la voiture. On montrera en particulier que l'accélération est radiale, c'est-à-dire dirigée selon $\overrightarrow{u_r}$.

Exercice 4 : Duel de Mercedes

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Lewis Hamilton et Valtteri Bottas arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent le virage de deux façons différentes :

- Hamilton suit une trajectoire circulaire de rayon R_H = 90,0 m ;
- Bottas choisit une trajectoire de rayon R_B = 75,0 m.



On cherche à trouver la trajectoire optimale, c'est-à-dire à savoir lequel des deux pilotes gagne du temps dans le virage.

Q1. Déterminer les distances D_H et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Peut-on conclure ?

Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesses v_H et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ.

Q2. Déterminer ces vitesses en sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieure à 0,8g : au-delà de cette limite, elles dérapent et finissent la course dans les graviers. Les calculer numériquement.

Q3. Quelle est finalement la meilleure trajectoire ?

Exercices d'entrainement

Exercice 6 : Rien ne sert de courir

Après avoir fait la sieste sous un arbre à 20,0 m de la ligne d'arrivée, le Lièvre se réveille et aperçoit la Tortue qui le précède d'une distance $\boldsymbol{d}$ égale à 19,5 m. Elle file vers le succès dans cette dernière ligne droite, avec une vitesse constante de valeur $\boldsymbol{v_0}$ égale à 0,250 m.s^{-1}. Le Lièvre se met alors à courir avec une accélération de valeur égale à 9,00 m.s^{-2} jusqu'à atteindre une vitesse $\boldsymbol{v_1}$ de valeur 18,0 m.s^{-1} et s'y maintenir.
L'origine du repère orthonormé associée au référentiel terrestre est prise au pied de l'arbre où le Lièvre faisait la sieste. Le Lièvre et la Tortue sont modélisés par des points matériels.

Q1. Combien de temps faut-il à la tortue pour atteindre la ligne d'arrivée ?

Q2. A la vitesse de pointe $\boldsymbol{v_1} = 18\ \mathrm{m.s^{-1}}$, quelle distance $\boldsymbol{d_1}$ parcourt le Lièvre pendant cette durée ? Peut-on faire un pronostic sur le résultat de la course à partir de ces valeurs ?

Q3. Ecrire, dans le repère orthonormé choisi, les équations horaires des mouvements de la Tortue et du Lièvre lors de la première phase de son mouvement.

Q4. A quelle distance de l'arbre le Lièvre se trouve-t-il à la fin de la première phase de son mouvement ? Montrer alors qu'il a perdu la course.

Q5. Combien de temps après la tortue le Lièvre franchira-t-il la ligne d'arrivée ?