Cinématique du point

Plan du cours

1. **Le système** 1
2. **Référentiels d'observation** 1
   2.1. Repère de temps 1
   2.2. Repère d'espace 1
   2.3. Définition d'un référentiel 1
   2.4. Hypothèse forte associée au modèle 2
3. **Outils pour décrire le mouvement** 2
   3.1. Vecteur position 2
   3.2. Vecteur vitesse 2
   3.3. Vecteur accélération 2
4. **Caractéristiques du mouvement** 3
5. **Les différentes bases** 3
   5.1. La base cartésienne 3
   5.2. La base polaire (2D) 4
   5.3. La base cylindrique (3D) 5
   5.4. La base sphérique 6
6. **Etude d'un mouvement circulaire** 6
   6.1. Mouvement circulaire quelconque 6
   6.2. Mouvement circulaire uniforme 6
   6.3. Généralisation : le repère de Frenet 7

La cinématique est l'étude du mouvement ***indépendamment*** des causes qui le provoque.

1. Le système

Définition : Le système

Le ***système*** désigne le corps étudié.
Tout ce qui n'est pas le système est qualifié d'extérieur.

Pour simplifier, on assimilera dans les premiers chapitres de mécanique le système à un point matériel, noté M, ayant la même masse que l'ensemble du système et situé au centre d'inertie (défini comme le barycentre des masses du système).

Méthode : On indique toujours le système étudié !

On commence toujours par indiquer quel est le système considéré.

2. Référentiels d'observation

2.1. Repère de temps

Pour se repérer dans le temps, il faut :

- Un instant d'origine : $t = 0$;
- Une unité de temps : la seconde *s ;*
- Une orientation : sens des temps croissants.

2.2. Repère d'espace

Pour se repérer dans l'espace, il faut :

- Un point d'origine O
- Une unité de distance : le mètre *m*
- Des vecteurs définissant des directions (deux en 2D, trois en 3D)

2.3. Définition d'un référentiel

Définition : Référentiel

On appelle ***référentiel*** $\mathcal{R}$, lié à un solide (S) de référence, l'***association*** d'un ***repère d'espace***, lié à (S), et d'un ***repère de temps***.

Illustration : Référentiel du laboratoire, référentiel terrestre, référentiel géocentrique, référentiel héliocentrique, etc.

Méthode : On indique toujours le référentiel d'étude !

Le mouvement d'un système dépend du choix du référentiel : avant d'aborder un problème de mécanique, dire systématiquement dans quel référentiel on travaille !

2.4. Hypothèse forte associée au modèle

On suppose que les valeurs mesurées pour les distances et pour les durées sont indépendantes du référentiel : le ***temps*** et les ***distances*** ont un ***caractère absolu***.

Cette hypothèse associée à la ***mécanique classique*** est mise en défaut quand :
- les vitesses deviennent élevées (à partir de 1/3 de la vitesse de la lumière dans le vide environ) ;
- les forces de gravitation deviennent trop importantes.

Dans le premier cas, il faut avoir recours à la théorie de la relativité restreinte, dans le second cas, à la théorie de la relativité générale.

3. Outils pour décrire le mouvement

3.1. Vecteur position

Définition : Vecteur position

La ***position*** d'un point M à un instant $\boldsymbol{t}$ désigne l'endroit où celui-ci se trouve par rapport à l'origine du repère. Le ***vecteur position*** se note $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$.

Définition : Trajectoire

L'ensemble des points occupés successivement par le point M au cours du temps constitue la ***trajectoire*** de ce point. Elle dépend du référentiel.

3.2. Vecteur vitesse

Définition : Vecteur vitesse

La ***vitesse instantanée*** du point *M* correspond à la variation de sa position par unité de temps :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{OM}(\boldsymbol{t} + \Delta \boldsymbol{t}) - \overrightarrow{OM}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} \right)_{\mathcal{R}}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}}$$

- Le vecteur vitesse correspond donc à la dérivée de la position par rapport au temps.
- La direction de la vitesse est tangente à la trajectoire du système.
- Son sens indique dans quel sens est parcourue la trajectoire.
- La valeur de la vitesse est donnée par la norme du vecteur et s'exprime en $m.s^{-1}$.
- Par définition, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}$ est tangent à la trajectoire au point *M*.

3.3. Vecteur accélération

Définition : Vecteur accélération

L'***accélération*** du point *M* correspond à la variation de sa vitesse par unité de temps

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{M/\mathcal{R}}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}(\boldsymbol{t} + \Delta \boldsymbol{t}) - \overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}} \right)_{\mathcal{R}}$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_{M/\mathcal{R}}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{M/\mathcal{R}}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}}$$

- Le vecteur accélération correspond à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.
- La valeur de l'accélération est donnée par la norme du vecteur et s'exprime en $m.s^{-2}$.

4. Caractéristiques du mouvement

Définition : Caractéristiques d'un mouvement

Pour caractériser un mouvement, on utilise en règle générale deux adjectifs :

Le premier adjectif caractérise le type de trajectoire. Le mouvement est dit :

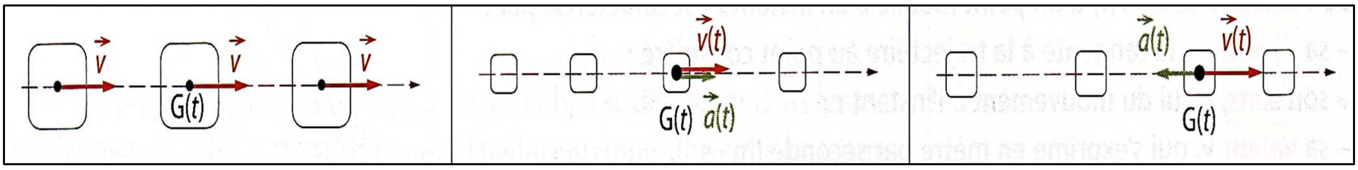
- ***rectiligne*** si la trajectoire est une droite.
- ***circulaire*** si la trajectoire est un cercle.
- ***elliptique*** si la trajectoire est une ellipse.
- ***…***

Le second adjectif caractérise la variation de vitesse. Le mouvement est dit :

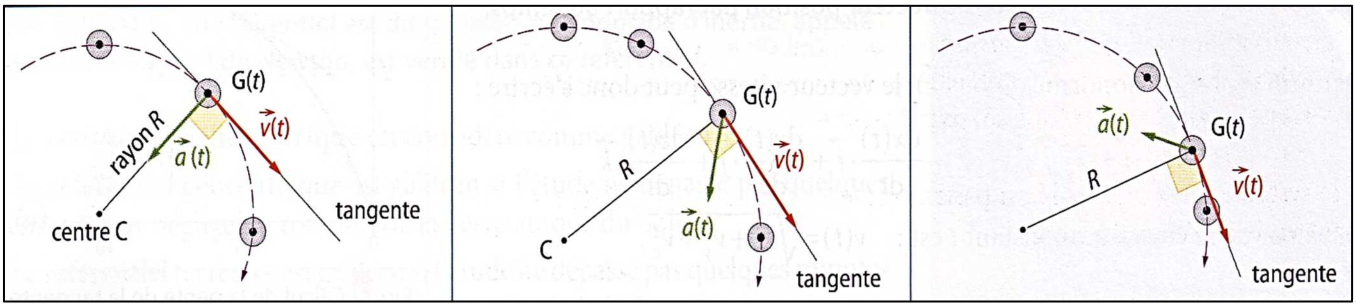
- ***uniforme*** si la norme de la vitesse est constante $\|\vec{v}\| = c^{ste}$.
- ***accéléré*** si la norme de la vitesse augmente ($\vec{v}.\vec{a} > 0$).
- ***ralenti*** si la norme de la vitesse diminue ($\vec{v}.\vec{a} < 0$).

Quelques exemples :

Rectiligne uniforme — Rectiligne accéléré — Rectiligne ralenti



Circulaire uniforme — Circulaire accéléré — Circulaire ralenti

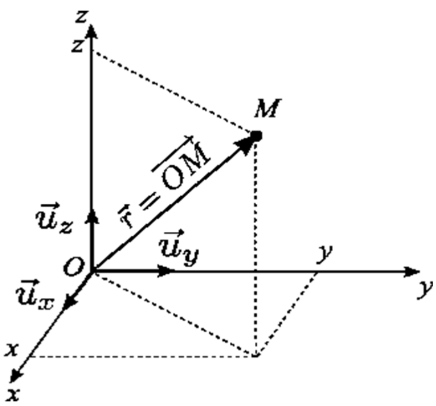


5. Les différentes bases

5.1. La base cartésienne

5.1.1. Coordonnées cartésiennes

On définit un repère orthonormée direct (O; $\vec{u}_x$; $\vec{u}_y$; $\vec{u}_z$).



Définition : Repère orthonormé

Ortho- :	Les trois vecteurs sont perpendiculaires entre eux. Conséquence : on peut traiter chaque composante indépendamment des autres.
Normé :	L'unité associé à chaque direction est la même.
Direct :	Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, dans cet ordre, sont orientés comme les trois premiers doigts de la *main droite*.

Définition : Coordonnées en base cartésienne

Le ***vecteur position*** s'exprime alors par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t).\vec{u}_x + y(t).\vec{u}_y + z(t).\vec{u}_z$$

(x; y; z) sont appelés ***coordonnées cartésiennes*** du point M.

Remarques : La notation $x(t)$ indique que ces coordonnées peuvent dépendre du temps.

Les coordonnées pourront être notées de la façon suivante : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

5.1.2. Vecteur vitesse en base cartésienne

Méthode : Notation des dérivées par rapport au temps

- On note parfois la dérivée par rapport au temps avec un point au-dessus de la variable qui est dérivée. Par exemple : $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
- Deux points signifient que l'on considère la dérivée seconde : $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

Définition : Coordonnées du vecteur vitesse en base cartésienne

- Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont : $\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{cases} v_x(t) = \dot{x} \\ v_y(t) = \dot{y} \\ v_z(t) = \dot{z} \end{cases}$
- La valeur de la vitesse est donnée par la norme du vecteur : $\|\vec{v}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$.

5.1.3. Vecteur accélération en base cartésienne

Définition : Coordonnées du vecteur accélération en base cartésienne

- Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération sont : $\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \begin{cases} a_x(t) = \dot{v_x} = \ddot{x} \\ a_y(t) = \dot{v_y} = \ddot{y} \\ a_z(t) = \dot{v_z} = \ddot{z} \end{cases}$
- La valeur de l'accélération est donnée par la norme du vecteur $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$.

5.1.4. Déplacement élémentaire en base cartésienne

Définition : Déplacement élémentaire

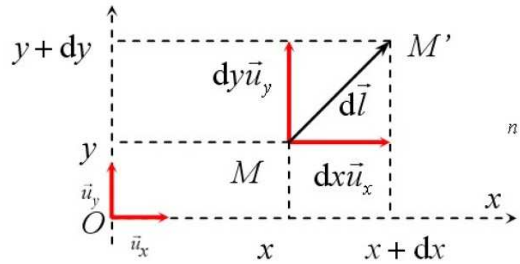
Le déplacement élémentaire est le déplacement infiniment petit $\overrightarrow{d\ell}$ réalisé lors d'un temps infiniment court $\boldsymbol{dt}$.
Ce déplacement élémentaire entre $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{t + dt}$ correspond dans ce cas à $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{d\ell}$.

Propriété : Déplacement élémentaire en cartésien

Dans la base cartésienne le déplacement élémentaire se décompose de la façon suivante :

$$\overrightarrow{d\ell}(t) = dx(t).\vec{u}_x + dy(t).\vec{u}_y + dz(t).\vec{u}_z$$

où dx, dy et dz sont les déplacements élémentaires sur chacun des axes.

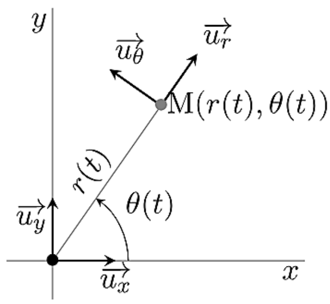


5.2. La base polaire (2D)

5.2.1. Coordonnées en base polaire

Définition : Coordonnées en base cartésienne

- La base polaire est une orthonormée directe : $(\overrightarrow{u_r}\,;\overrightarrow{u_\theta})$.
- Le vecteur position s'exprime alors par : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \mathrm{r}.\overrightarrow{u_r}}$
- (r, θ) sont appelés coordonnées polaires du point M.



5.2.2. Lien avec la base cartésienne : relation de passage

Propriété : Lien entre base polaire et base cartésienne

On peut exprimer la base $(\overrightarrow{u_r}\,;\overrightarrow{u_\theta})$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}\,;\overrightarrow{u_y})$: $\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos(\theta).\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta).\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta).\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta).\overrightarrow{u_y} \end{cases}$

Et on peut, de même, lier les deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$$

5.2.3. Vitesse en base polaire

Propriété : Dérivée temporelle des vecteurs unitaires de la base polaire

Dans la base polaire, les ***vecteurs unitaires*** $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ ne sont pas constants au cours du temps. On montre que les expressions de leur ***dérivée temporelle*** sont :

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u_r}$$

Définition : Coordonnées du vecteur vitesse en base cartésienne

Les coordonnées polaires du vecteur vitesse sont :

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \underbrace{\dot{r}.\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}}_{\substack{\text{vitesse}\\\text{radiale}}} + \underbrace{\boldsymbol{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}_{\substack{\text{vitesse}\\\text{tangentielle}}}$$

5.2.4. Accélération en base polaire

Définition : Coordonnées du vecteur accélération en base polaire

Les coordonnées polaires du vecteur vitesse sont :

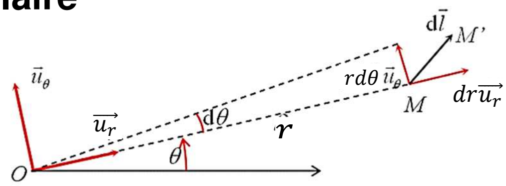
$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right).\overrightarrow{u_r} + \left(2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}\right).\overrightarrow{u_\theta}$$

5.2.5. Déplacement élémentaire en base polaire

Propriété : Déplacement élémentaire en polaire

Dans la base polaire le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ se décompose de la façon suivante :

$$d\vec{l} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.\mathrm{d}\theta.\overrightarrow{u_\theta}$$

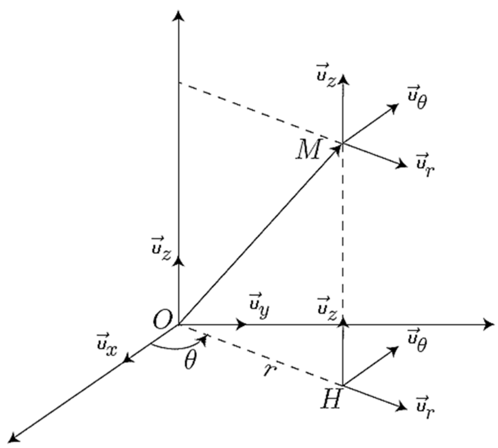


5.3. La base cylindrique (3D)

Les coordonnées cylindriques sont une généralisation en 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe z.

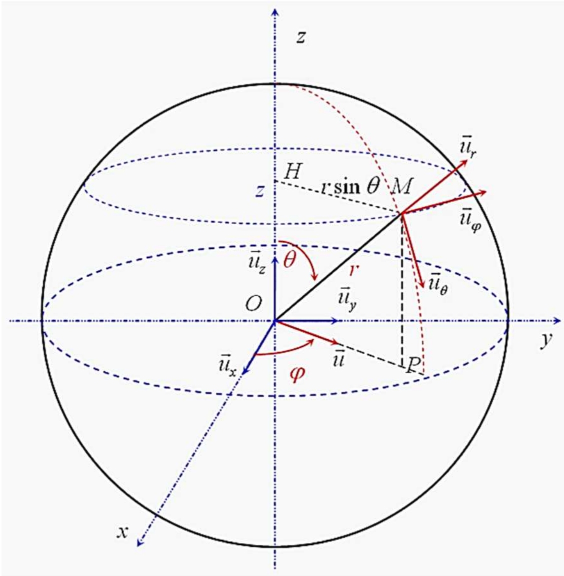
Repérage et définitions :

- Un point M est repéré par trois coordonnées : les distances r et z, et l'angle θ.
  - $r = HM$ est la distance à l'axe Oz,
  - θ est l'angle entre OH et l'axe des x.
  - z est la hauteur du point M par rapport au plan xOy.
- $r \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.
- En M, on construit un repère orthonormé direct $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$.



La coordonnée z étant indépendante des 2 autres coordonnées, l'expression pour la vitesse v_z et l'accélération a_z restent les mêmes qu'en coordonnées cartésiennes.

5.4. La base sphérique



Un point M de l'espace est repéré dans ces systèmes par les 3 coordonnées « sphériques » suivantes :

- la distance $\boldsymbol{r}$ à l'origine du repère O,
- l'angle θ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Oz). Cet angle, compris entre 0 et π, est appelé « ***colatitude*** ».
- l'angle φ correspond à l'angle, dans le plan (xOy), entre l'axe (Ox) et $\overrightarrow{OP}$ où P est le projeté de M dans le plan (xOy). Cet angle est compris entre 0 et 2π, et est appelé « ***longitude*** ».

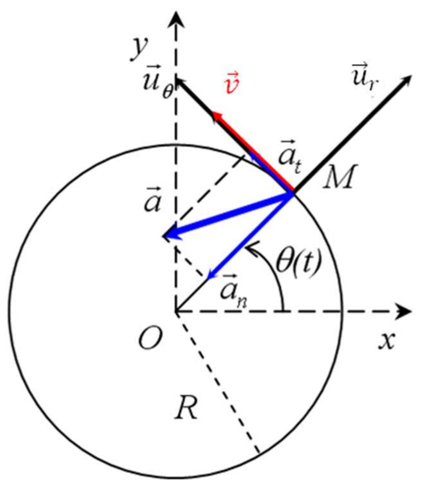
La base associée est $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ avec :

- $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire dirigé selon le rayon de O vers M;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ contenu dans le plan défini par l'axe (Oz) et $\overrightarrow{OM}$, orienté dans le sens des θ croissants ;
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ un vecteur unitaire complétant le trièdre de façon à ce que $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ soit un trièdre direct.

Dans la base sphérique, le rayon vecteur est alors décrit simplement par : $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$.

6. Etude d'un mouvement circulaire

6.1. Mouvement circulaire quelconque



Définition : Mouvement circulaire

Un mouvement est circulaire si la trajectoire du système est un cercle de ***rayon*** R ***constant***.

Propriété : Caractéristiques du mouvement circulaire

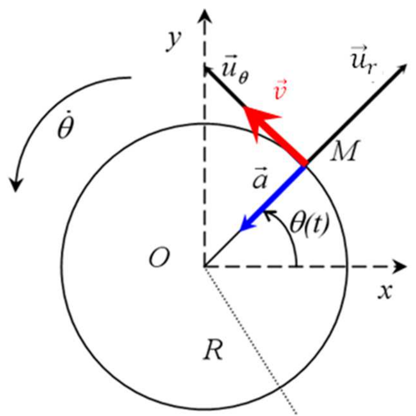
Puisque $r =$ constante, $\dot{r} = 0$.

- <u>*Déplacement élémentaire*</u> : $d\vec{l} = r.\mathrm{d}\theta.\overrightarrow{u_\theta}$
- <u>*Vitesse*</u> : $\vec{v}(t) = r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$
- <u>*Accélération*</u> : $\vec{a}(t) = -r.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{u_r} + r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$

Avec $v = \|\vec{v}\| = r.\dot{\theta}$, on obtient :

$$\boldsymbol{\vec{a}(t)} = \underbrace{-\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}}.\boldsymbol{\overrightarrow{u_r}}}_{\substack{\boldsymbol{accélération}\\ \boldsymbol{normale}\ \boldsymbol{\overrightarrow{a_n}}}} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}.\boldsymbol{\overrightarrow{u_\theta}}}_{\substack{\boldsymbol{accélération}\\ \boldsymbol{tangentielle}\ \boldsymbol{\overrightarrow{a_t}}}}$$

6.2. Mouvement circulaire uniforme



Pour un mouvement circulaire uniforme, on a en plus une ***vitesse angulaire*** $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}$ constante. On a donc en plus $\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} = 0$.

Propriété : Caractéristiques du mouvement circulaire uniforme

L'accélération est dans ce cas ***radiale*** et ***centripète*** (vers le centre de rotation) :

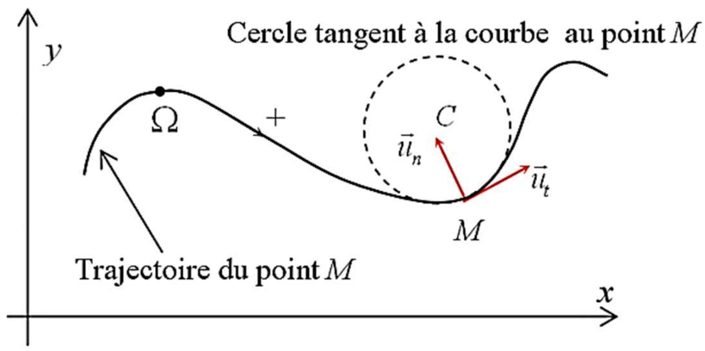
$$\vec{a}(t) = -\frac{v^2}{r}.\overrightarrow{u_r} = -r.\omega^2.\overrightarrow{u_r}$$

6.3. Généralisation : le repère de Frenet

Définition : Repère de Frenet

Le ***repère de Frenet*** est un ***repère tournant*** qui se déplace avec le système le long de la trajectoire. Il utilise deux vecteurs unitaires partant du point M :

- le **vecteur tangentiel** $\overrightarrow{u_t}$, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.
- le **vecteur normal** $\overrightarrow{u_n}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{u_t}$ et orienté vers l'intérieur de la courbure.



La construction du repère de Frenet fait apparaître un cercle de centre C et de rayon $\boldsymbol{R}$ localement tangent en M à la trajectoire : il est appelé ***cercle osculateur***. Le rayon $\boldsymbol{R}$ de ce cercle correspond alors au ***rayon de courbure*** de la trajectoire au point considéré et C est le centre de courbure, ou ***centre instantané de rotation***.

Propriété : Accélération dans la base de Frenet

Par analogie avec le cas du mouvement circulaire, on admettra que pour un mouvement quelconque :

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2}{R}.\overrightarrow{u_n} + \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_t}$$

où l'on définit $\boldsymbol{R}$ comme le rayon de courbure de la trajectoire au point M.

- La ***composante normale*** de l'accélération $a_n = \frac{v^2}{R}$ est toujours positive : elle est toujours tournée vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré. Elle est d'autant plus importante que le rayon de courbure est faible (virage serré).
- La ***composante tangentielle*** de l'accélération $a_t = \frac{dv}{dt}$ indique si la valeur de la vitesse change. Si le mouvement est uniforme ce terme est nul.

Au programme

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	▪ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.	
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	▪ Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes. ▪ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. ▪ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. ▪ Choisir un système de coordonnées adapté au problème.	
Mouvement à vecteur accélération constant.	▪ Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. ▪ Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	▪ Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.	
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	▪ Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. ▪ Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. ▪ ***Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.***	