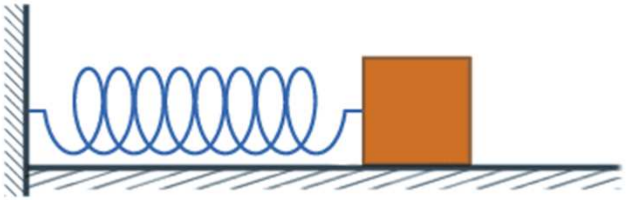
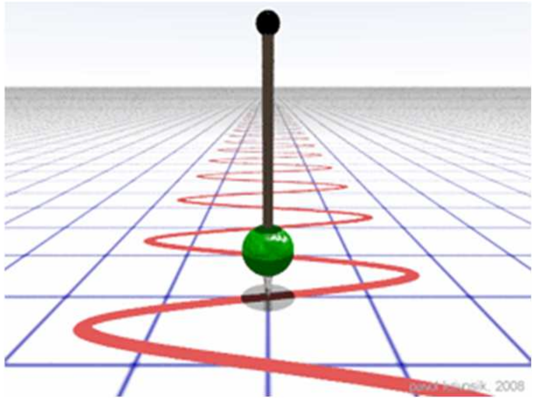
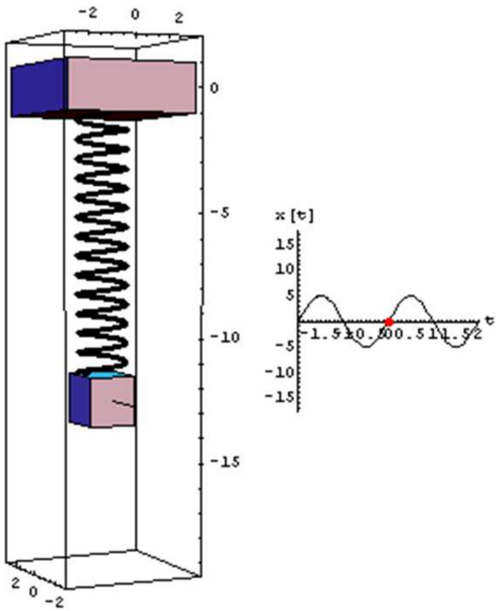
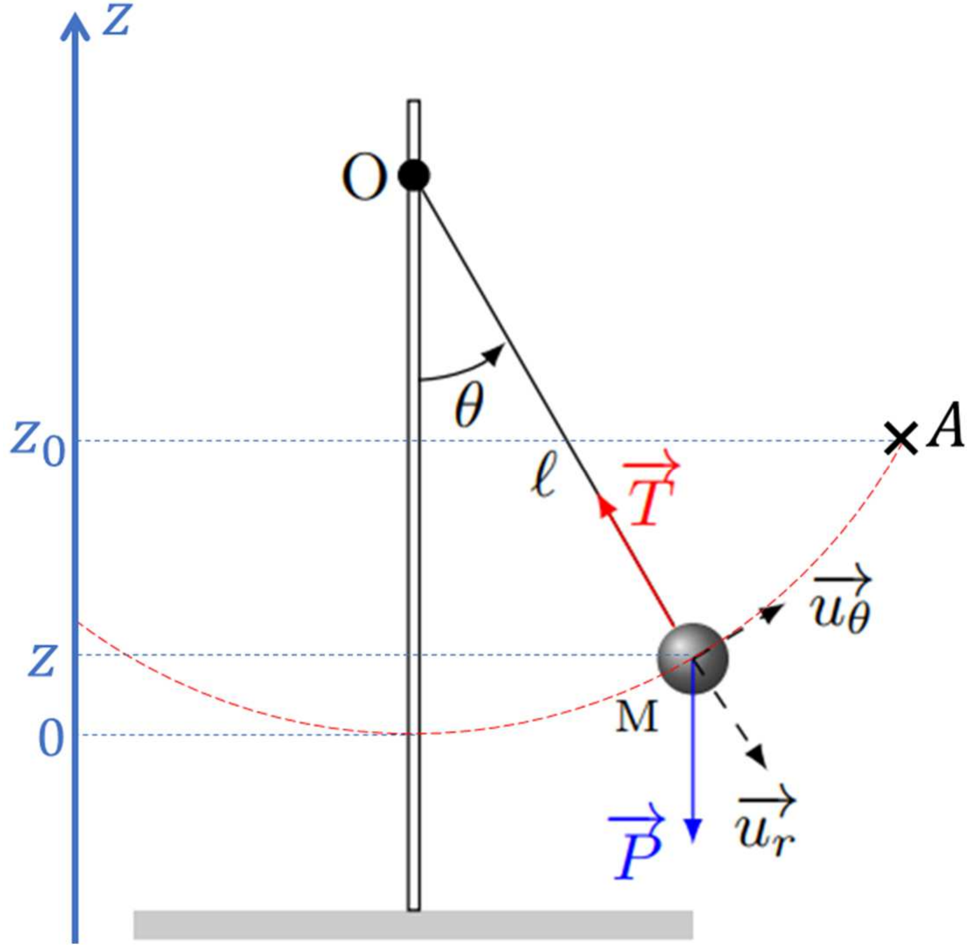




Oscillateurs linéaires



Le pendule simple



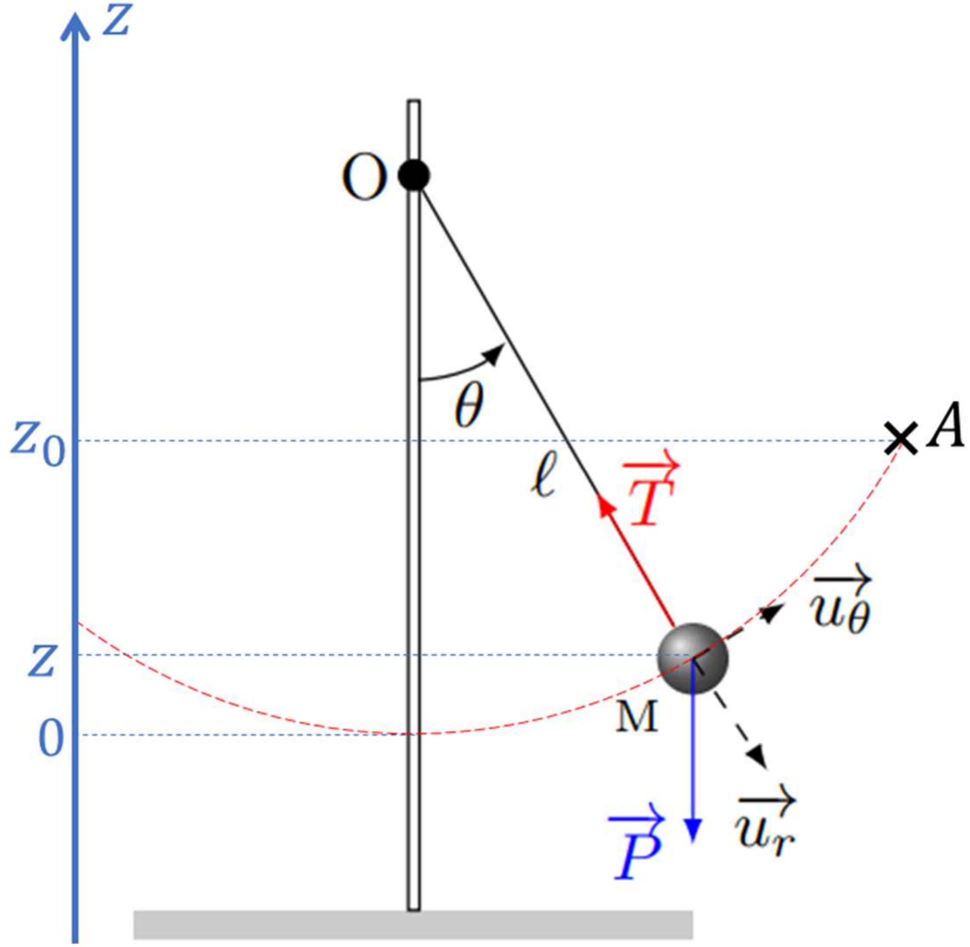
Approche type PFD à savoir faire !

Equation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0}$$

Non-linéaire

Le pendule simple



Approche type PFD à savoir faire !

Equation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0$$

Linéarisation:
Approx. des petits angles

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

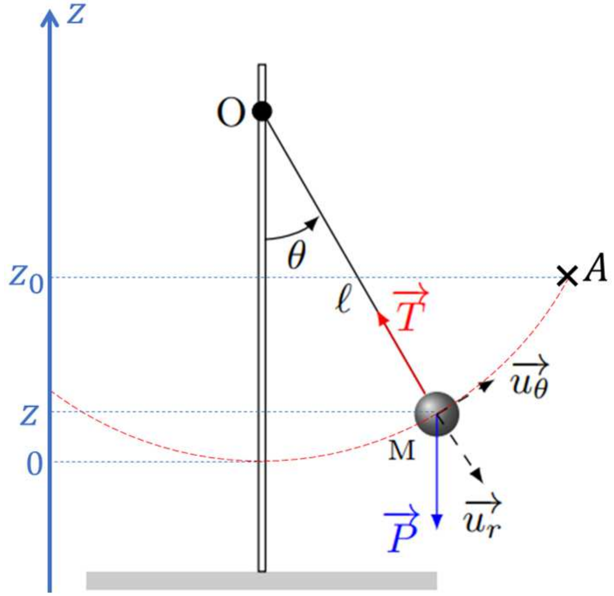
Oscillateur harmonique : équation différentielle

Définition : Oscillateur harmonique

On appelle ***oscillateur harmonique*** à une dimension tout système physique dont la grandeur $\boldsymbol{s(t)}$ évoluant dans le temps (position, angle, tension, courant, ...) est décrite par ***une équation différentielle linéaire d'ordre 2*** de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{s(t)}}{dt^2} + {\omega_0}^2.\boldsymbol{s(t)} = 0}$$

Cette équation est la ***forme canonique*** de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.



$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

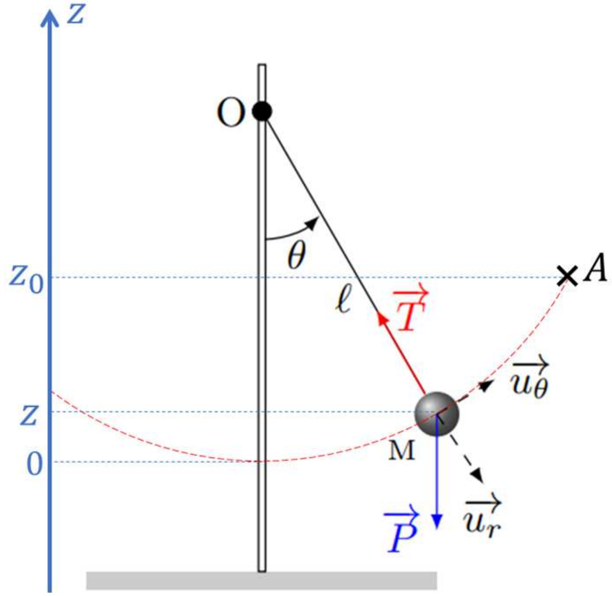
Oscillateur harmonique : équation différentielle

Définition : Oscillateur harmonique

On appelle ***oscillateur harmonique*** à une dimension tout système physique dont la grandeur $\boldsymbol{s(t)}$ évoluant dans le temps (position, angle, tension, courant, ...) est décrite par ***une équation différentielle linéaire d'ordre 2*** de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{s(t)}}{dt^2} + {\omega_0}^2.\boldsymbol{s(t)} = 0}$$

Cette équation est la ***forme canonique*** de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.



$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

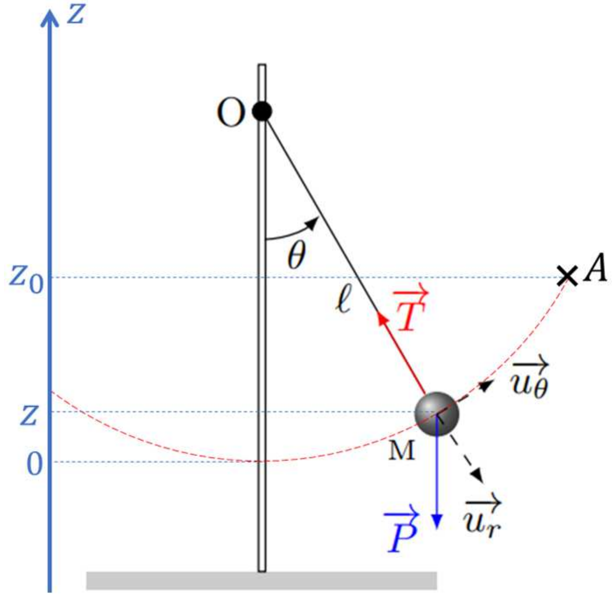
Oscillateur harmonique : Résolution

<u>Solution de la forme</u> :

$$\boxed{\boldsymbol{s}(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)}$$

A et B des constantes

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = S_{\max}.\cos(\omega_0.t + \varphi)$$



$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Savoir-faire 0 – Exploiter l'expression mathématique d'un signal sinusoïdal

Un capteur permet d'enregistrer un signal électrique qui se met sous la forme

$$S(t) = S_0 + S_m . sin(\omega . t)$$

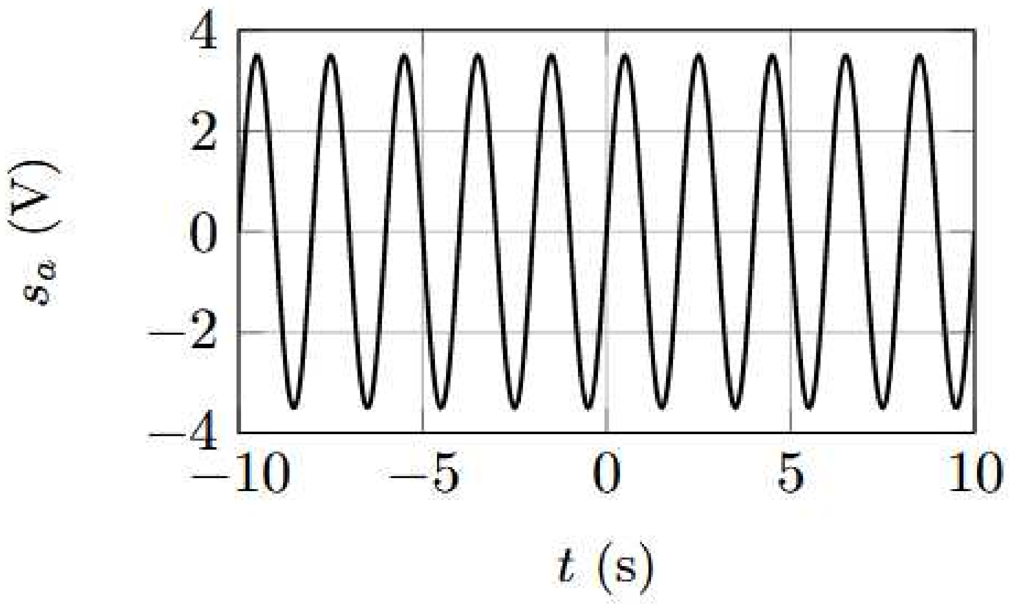
où S_0, S_m et ω sont des constantes.

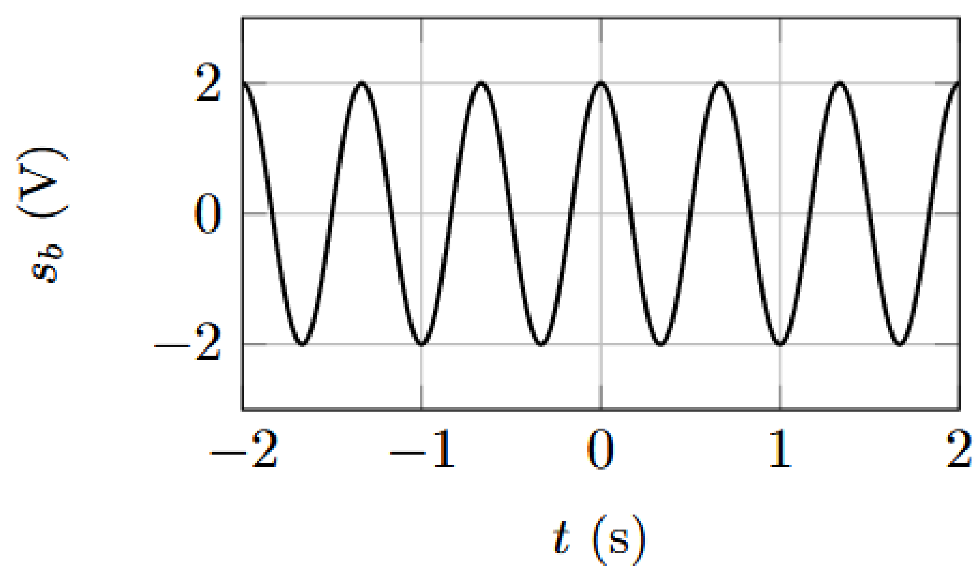
On donne S_0 = 2,0 V, S_m = 1,0 V et ω = 6,28.10^4 rad.s^{-1}.

1. Comment peut-on qualifier ce signal ?
2. Déterminer l'amplitude, la fréquence et la période de ce signal.
3. Quelle est la valeur moyenne de ce signal ? Représenter son graphe sur 3 périodes.

Savoir-faire 0bis – Exploiter la représentation temporelle d’un signal sinusoïdal

1. Donner les expressions mathématiques associées aux deux signaux ci-dessous :





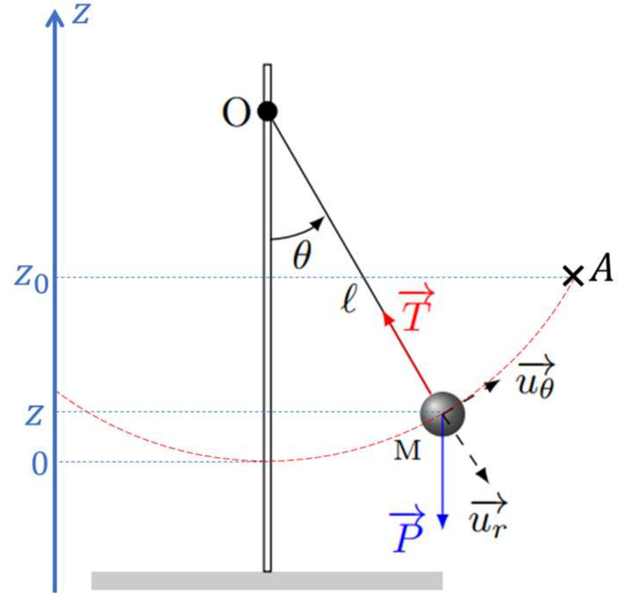
Oscillateur harmonique : Résolution

<u>Solution de la forme</u> :

$$\boxed{\boldsymbol{s}(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)}$$

A et B des constantes

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = S_{\max}.\cos(\omega_0.t + \varphi)$$



$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

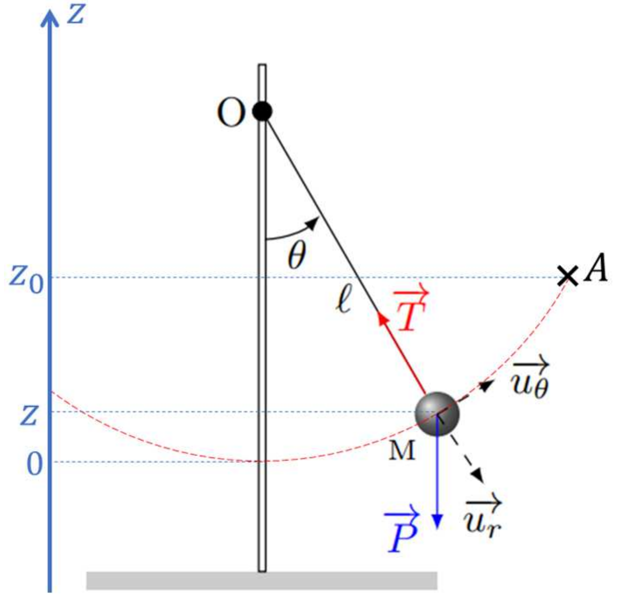
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Détermination des réels à l'aide des ***conditions initiales*** (2 inconnues → 2 conditions) :

-À $t = 0$, $\boldsymbol{s}(0) = S_0$ donc $A.cos(0) + B.sin(0) = S_0 \Leftrightarrow \boxed{A = S_0}$

- À $t = 0$, $v_0 = \frac{dy}{dt}(0)$ donc $-\omega_0.A.\sin(0) + \omega_0.B.\cos(0) = v_0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$

Oscillateur harmonique : Résolution



Solution de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)}$$

A et B des constantes

Détermination des réels à l'aide des ***conditions initiales*** (2 inconnues → 2 conditions) :

-À $t = 0$, $\boldsymbol{\theta}(0) = \theta_0$ donc $A.cos(0) + B.sin(0) = \theta_0 \Leftrightarrow \boxed{A = \theta_0}$

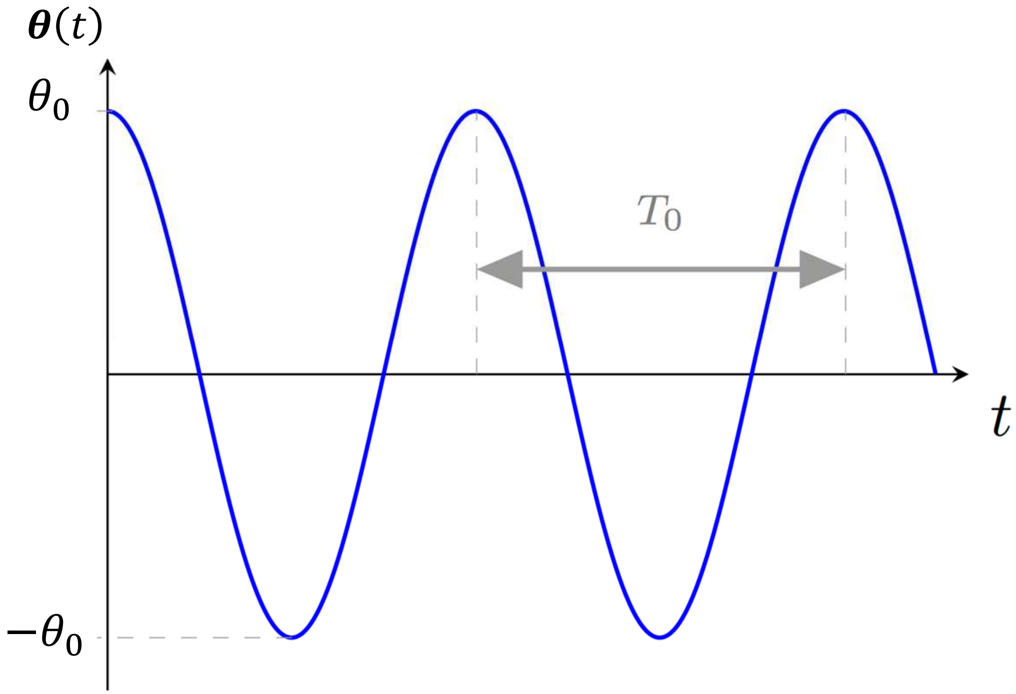
- À $t = 0$, $v_0 = 0$ donc $-\omega_0.A.\sin(0) + \omega_0.B.\cos(0) = v_0 \Leftrightarrow \boxed{B = 0}$

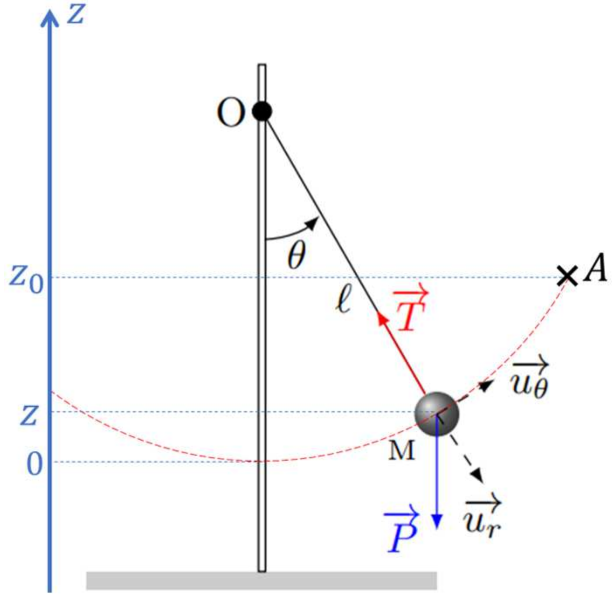
$$\boxed{\boldsymbol{\theta}(t) = \theta_0.\cos(\omega_0.t)}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Oscillateur harmonique : Représentation graphique





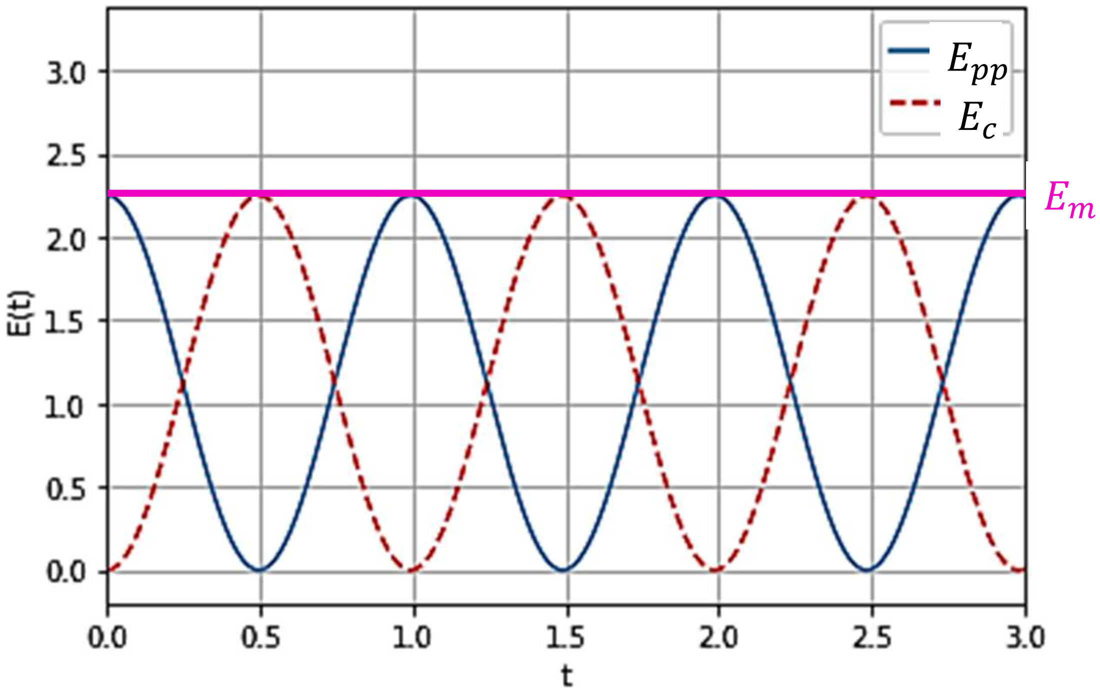
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

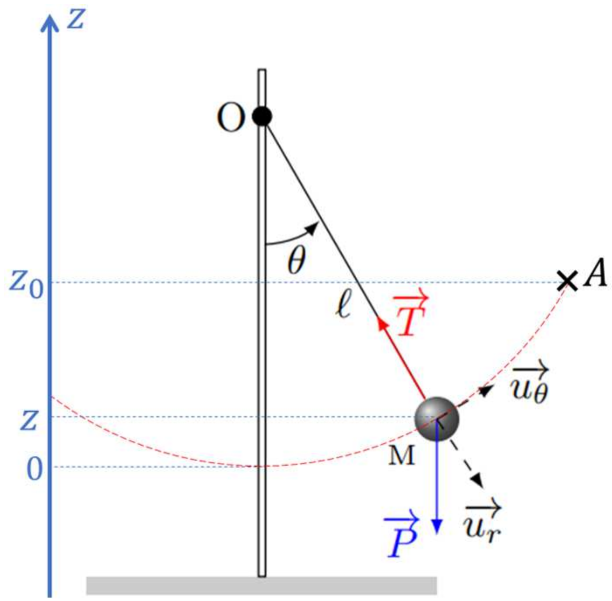
$$\boxed{\boldsymbol{\theta}(t) = \theta_0.\cos(\omega_0.t)}$$

avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Oscillateur harmonique : Aspect énergétique





$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\dot{\theta} = 0}$$

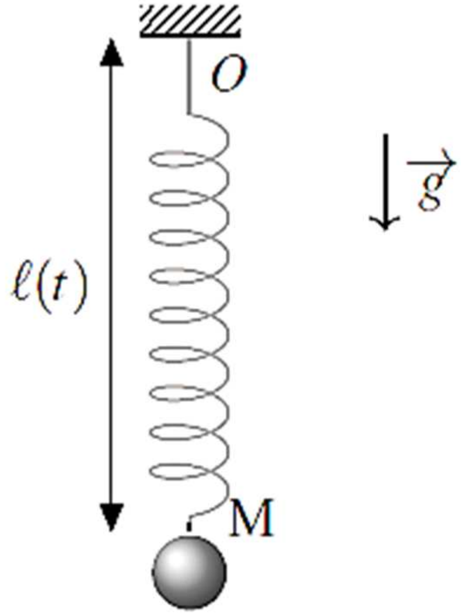
$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Propriété : Etude énergétique d'un oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique peut s'interpréter comme un ***transfert périodique*** d'énergie d'une forme d'énergie à une autre ***sans dissipation*** d'énergie : l'énergie totale reste constante.

Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (exemple mécanique)

On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu (verticalement) par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g.\overrightarrow{u_z}$. L'origine du référentiel est tout d'abord prise en O, point d'accroche du ressort au plafond (voir ci-contre). Le mouvement reste vertical.



1. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

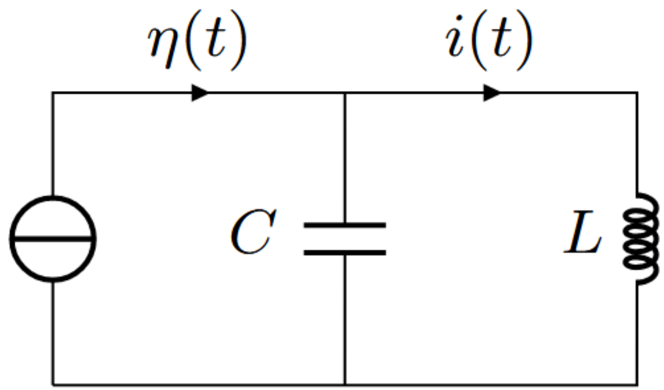
On abaisse le point M jusqu'à ce que le ressort mesure ℓ_{ini}. On lâche alors la masse sans vitesse initiale.

1. Déterminer l'équation du mouvement du mobile.
2. Résoudre cette équation et tracer l'allure de $\ell(t)$.

Savoir-faire 1bis – Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (exemple électrique)

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$.

On appelle $E_{tot} = E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1. Exprimer la dérivée $\frac{dE_{tot}}{dt}$ en fonction de i et $\frac{di}{dt}$.
2. Justifier qualitativement que E_{tot} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.
3. Retrouver cette équation par application des lois de Kirchhoff.
4. Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.
5. En déduire l'expression de $i(t)$.

Et si on rajoute un élément dissipant l’énergie?

→ Oscillateur amorti

Oscillateur amorti

Définition : Oscillateur amorti

On appelle ***oscillateur amorti*** à une dimension tout système physique dont la grandeur $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$ évoluant dans le temps (position, angle, tension, courant, ...) est décrite par ***une équation différentielle linéaire d'ordre 2*** de la forme :

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{d\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})}{dt} + {\omega_0}^2.\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = {\omega_0}^2.Y_\infty}$$

- ω_0 est la ***pulsation propre*** de l'oscillateur (en rad.s^{-1}), (à toujours identifier en 1er)
- Q est appelé **facteur de qualité** (sans dimension) (à identifier en 2ème)
- Y_∞ est la valeur prise par la fonction $\boldsymbol{y}$ lorsque $t \to \infty$ (« régime permanent »).

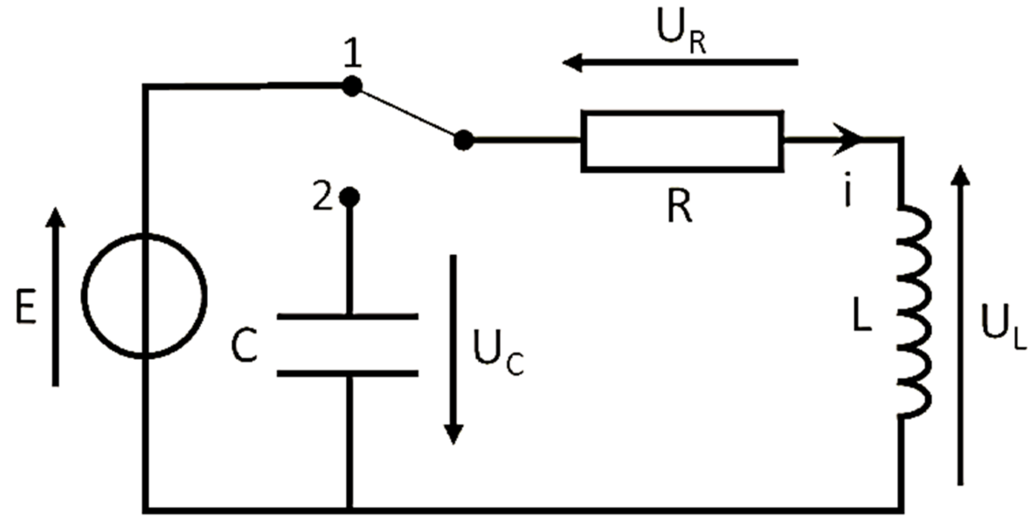
Savoir-faire 2 – Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur amorti (exemple électrique)

<u>Conditions initiales</u> :

- A t < 0, l'interrupteur est en position 1 depuis un temps suffisamment long.

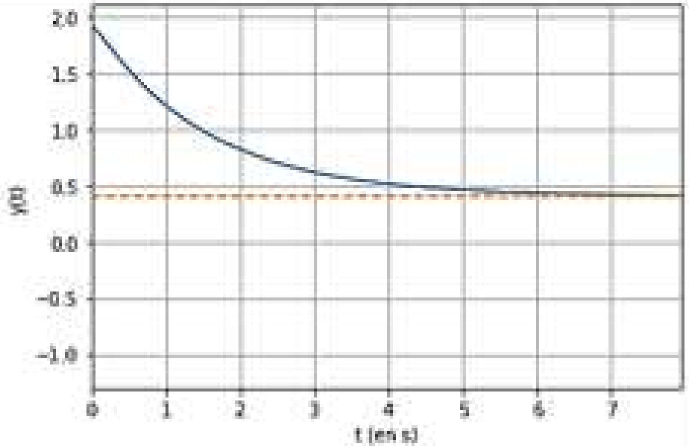
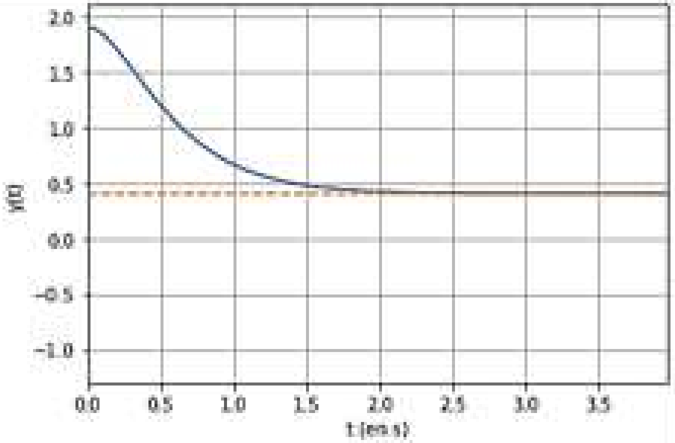
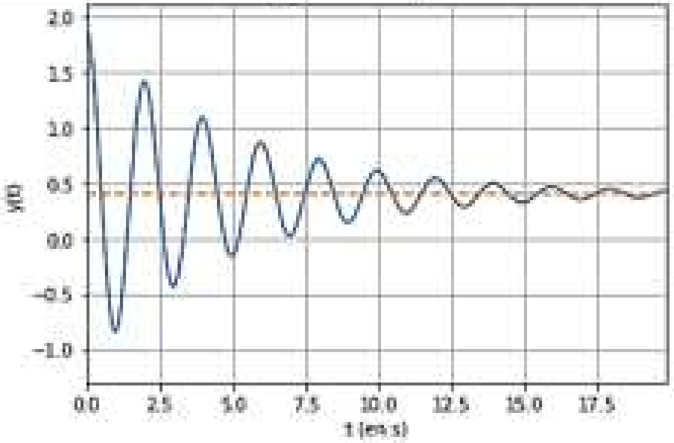
La bobine est chargée, le courant est établi à la valeur $I = E/R$. Le condensateur est déchargé.

- A t = 0, l'interrupteur bascule en position 2.



1. Etablir l'équation différentielle pour le courant électrique $i(t)$.
2. Résoudre cette équation et donner l'évolution temporelle des différentes grandeurs électriques du circuit (avec représentation graphique). ***On considérera un à un les différents régimes possibles***.

Les différents régimes

<table>
<tr><th></th><th>Régime apériodique
$(\boldsymbol{Q = 0,2})$</th><th>Régime critique
$(\boldsymbol{Q = 0,5})$</th><th>Régime pseudo-périodique
$(\boldsymbol{Q = 10})$</th></tr>
<tr><td>Temporel</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>$\boldsymbol{y}(t) = A.e^{r_+.t} + B.e^{r_-.t} + Y_\infty$</td><td>$\boldsymbol{y}(t) = (A.t + B).e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}} + Y_\infty$</td><td>$\boxed{\boldsymbol{y}(t) = A.e^{-\lambda.t}.\cos(\omega_p.t + \varphi) + Y_\infty}$

facteur d'amortissement : $\lambda = \frac{\omega_0}{2.Q}$

pseudo-pulsation : $\omega_p = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$

pseudo-période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$</td></tr>
</table>

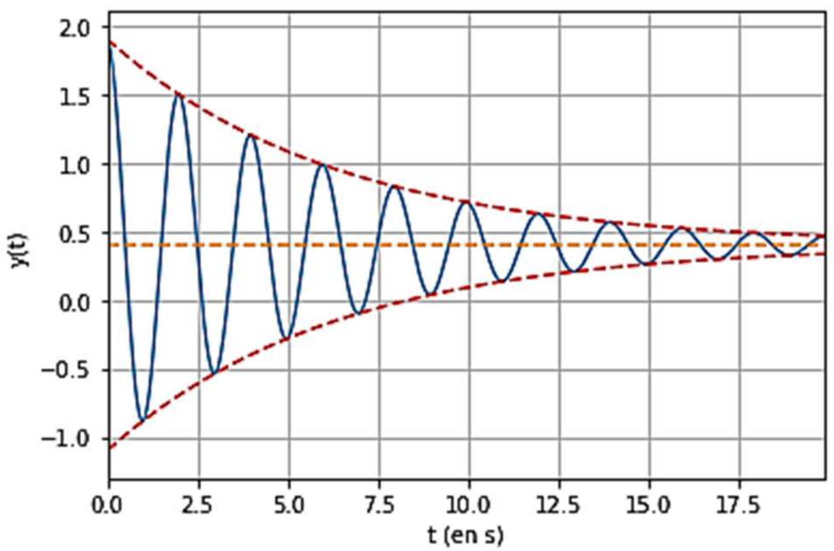
Étude du régime pseudo-périodique (Q élevé)

Méthode : Déterminer les caractéristiques du système

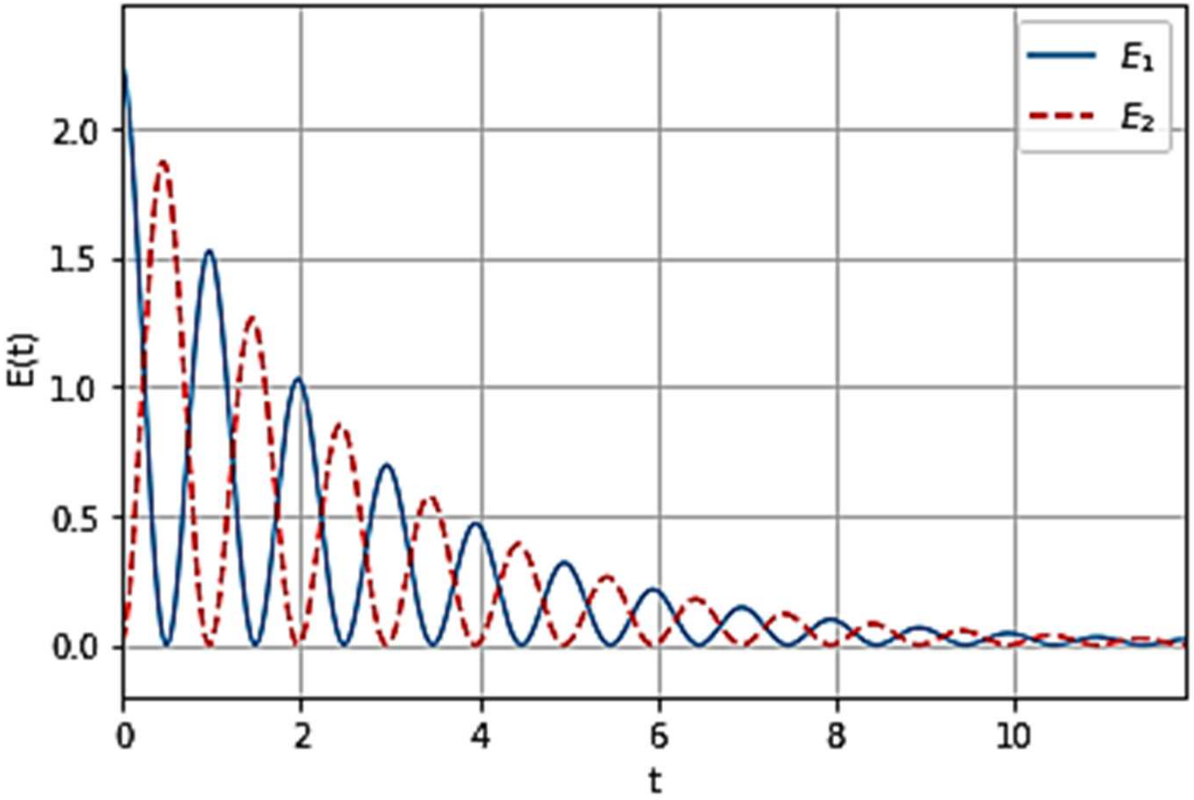
- $Q \gg 1 \Rightarrow \lambda \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_p \approx \omega_0 \ \Rightarrow T_p \approx T_0$
  La mesure de la pseudo-période T_p permet d'estimer la période propre T_0.

- On peut évaluer le facteur d'amortissement λ, et donc le facteur de qualité Q en mesurant le ***décrément logarithmique*** D :

$$D = \ln\left(\frac{y(t)-Y_\infty}{y(t+T_p)-Y_\infty}\right) = \lambda.T_p \approx \lambda.T_0 = \frac{\pi}{Q}$$

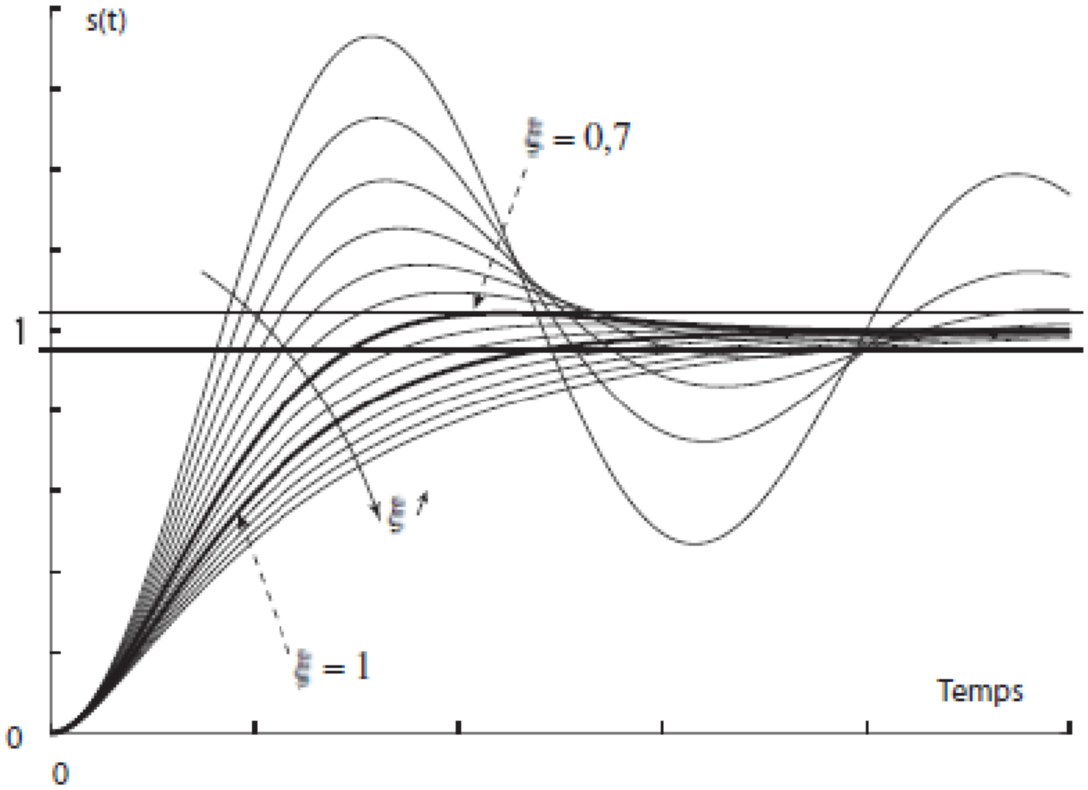


Étude du régime pseudo-périodique (Q élevé)

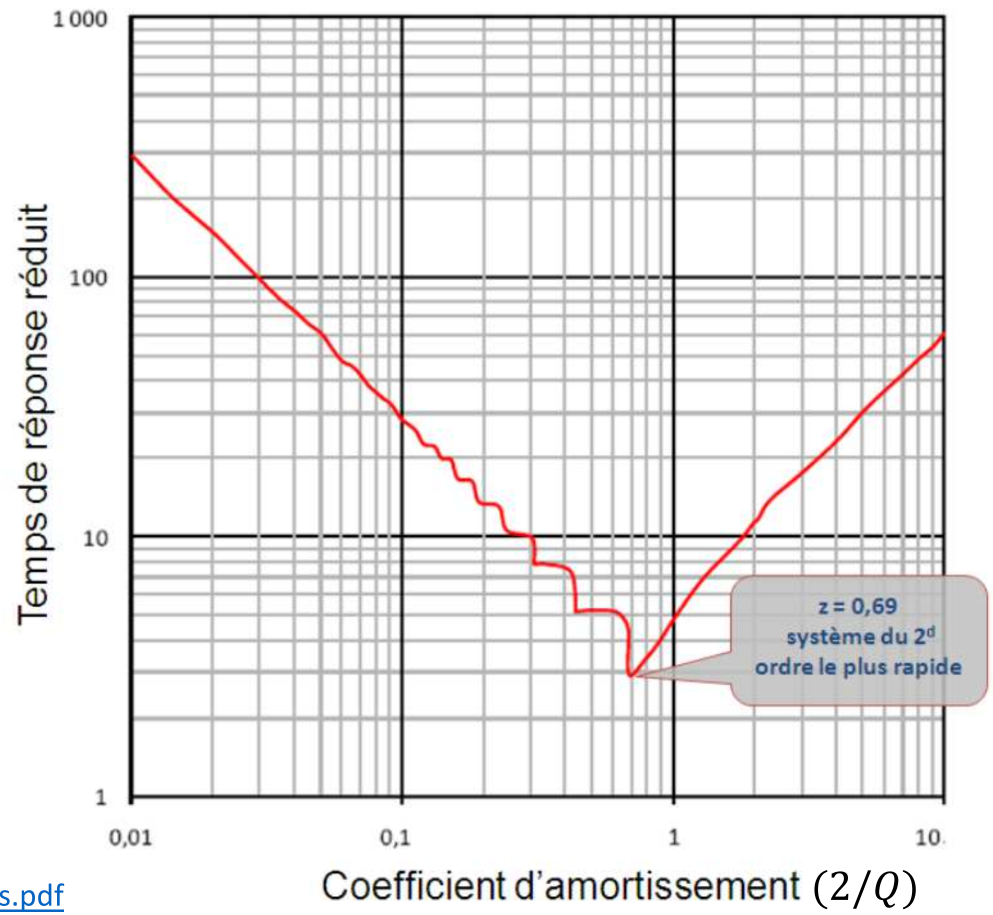


On constate que pour l'oscillateur amorti l'énergie totale ***diminue au cours*** du temps à cause de l'amortissement qui ***dissipe de l'énergie***.

Temps de réponse



https://www.cpge-brizeux.fr/wordpress/wp-content/uploads/Sequence4_Chapitre2_Cours.pdf



Analogie électromécanique

Électricité	**Mécanique** **(Ressort oscillant)**
Charge électrique du condensateur $q = C.u_C$	Position par rapport à la position au repos $x = y - y_0$
Intensité $i = \frac{dq}{dt}$	Vitesse $v = \frac{dx}{dt}$
Capacité C	Raideur du ressort k
Résistance R	Coefficient de frottement α
Inductance L	Masse m
Énergie magnétique $\frac{1}{2}.L.i^2$	Énergie cinétique $\frac{1}{2}.m.v^2$
Énergie électrostatique $\frac{1}{2}.\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}.C.{u_C}^2$	Énergie(s) potentielle(s) $\frac{1}{2}.k.x^2 \quad \underbrace{(+\,E_{pp})}_{cas\ vertical}$