Oscillateurs linéaires

Travaux Dirigés

« Tout jugement oscille sur la pointe de l'erreur… La connaissance est une perpétuelle aventure à la lisière de l'incertitude. »
Frank Herbert

En autonomie

Cahier d'entrainement : fiche 4 : 4.16 à 4.19

Savoir-faire

Savoir-faire 0 – Exploiter l'expression mathématique d'un signal sinusoïdal

Un capteur permet d'enregistrer un signal électrique qui se met sous la forme

$$S(t) = S_0 + S_m.sin(\omega.t)$$

où S_0, S_m et ω sont des constantes. On donne S_0 = 2,0 V, S_m = 1,0 V et ω = 6,28.10^4 rad.s^{-1}.

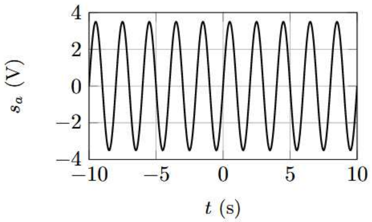
Q1. Comment peut-on qualifier ce signal ?

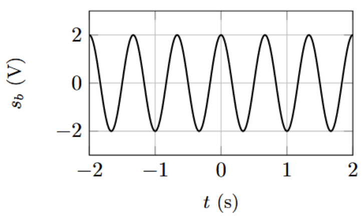
Q2. Déterminer l'amplitude, la fréquence et la période de ce signal.

Q3. Quelle est la valeur moyenne de ce signal ? Représenter son graphe sur 3 périodes.

Savoir-faire 0bis – Exploiter la représentation temporelle d'un signal sinusoïdal

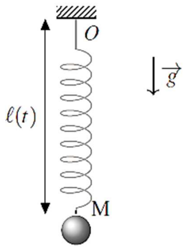
Q1. Donner les expressions mathématiques associées aux deux signaux ci-dessous :





Savoir-faire 1 – Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (exemple mécanique)

On considère un mobile M assimilable à une masse ponctuelle m et pendu (verticalement) par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g.\overrightarrow{u_z}$. L'origine du référentiel est tout d'abord prise en O, point d'accroche du ressort au plafond (voir ci-contre). Le mouvement reste vertical.



Q1. Déterminer la longueur ℓ_{eq} du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

On abaisse le point M jusqu'à ce que le ressort mesure ℓ_{ini}. On lâche alors la masse sans vitesse initiale.

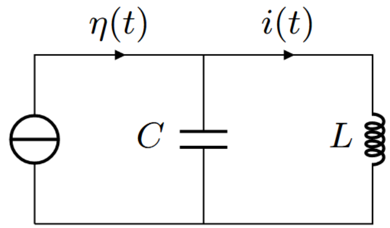
Q2. Déterminer l'équation du mouvement du mobile.

Q3. Résoudre cette équation et tracer l'allure de $\ell(t)$.

Savoir-faire 1bis – Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (exemple électrique)

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$.

On appelle $E_{tot} = E_C + E_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



Q1. Exprimer la dérivée $\frac{dE_{tot}}{dt}$ en fonction de i et $\frac{di}{dt}$.

Q2. Justifier qualitativement que E_{tot} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

Q3. Retrouver cette équation par application des lois de Kirchhoff.

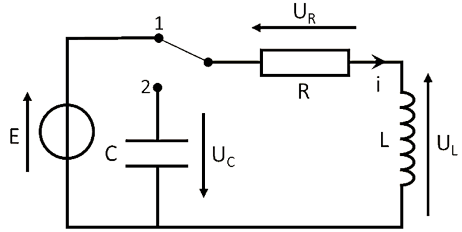
Q4. Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

Q5. En déduire l'expression de $i(t)$.

Savoir-faire 2 – Établir et résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur amorti (exemple électrique)

Conditions initiales :

- A t < 0, l'interrupteur est en position 1 depuis un temps suffisamment long.
  La bobine est chargée, le courant est établi à la valeur $I = E/R$. Le condensateur est déchargé.
- A t = 0, l'interrupteur bascule en position 2.



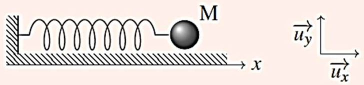
Q1. Etablir l'équation différentielle pour le courant électrique $i(t)$.

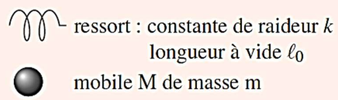
Q2. Résoudre cette équation et donner l'évolution temporelle des différentes grandeurs électriques du circuit (avec représentation graphique). ***On considérera un à un les différents régimes possibles***.

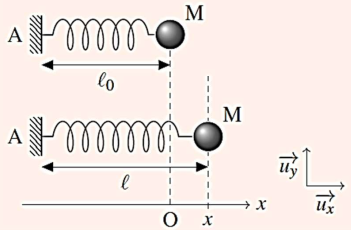
Exercices incontournables

Exercice 1 : Oscillateur mécanique horizontal (★☆☆)

On considère le dispositif composé d'un mobile assimilable à une masse ponctuelle m au point M, relié à une extrémité d'un ressort, l'autre extrémité étant fixe. Un guide, non représenté, impose au mobile de se déplacer uniquement selon l'axe x horizontal. On considère enfin que le mouvement du mobile dans le guide se fait sans frottement (glissière parfaite).







ℓ est la longueur du ressort à l'instant considéré.
$\vec{u_x}$ est un vecteur unitaire de direction celle du ressort.
A l'instant initial $t = 0$, le ressort est lâché avec une longueur
$\ell(t=0) = L_0 > \ell_0$ et une vitesse initiale nulle.
On posera $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ l'élongation (algébrique) du ressort en fonction du temps.

Q1. Faire un bilan des forces sur le mobile M et appliquer le principe fondamental de la dynamique.

Q2. En déduire l'équation différentielle du mouvement (équation sur $x(t)$). Identifiez alors la ou les constante(s) caractéristique(s) du mouvement.

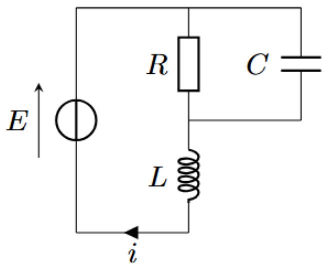
Q3. Identifier les conditions initiales pour la position $x(t)$ et la vitesse $v(t)$.

Q4. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir l'expression de $x(t)$. En déduire l'expression de $v(t)$.

Q5. Calculer l'évolution temporelle de l'énergie mécanique du système {masse, ressort} : $E_m = E_p + E_c$. Conclure.

Exercice 2 : Circuit à 2 mailles (★★☆)

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



Q1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Q2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

Q3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

Q4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

Q5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

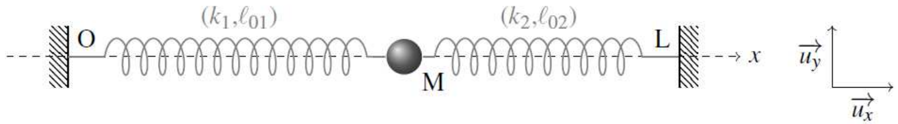
Exercice 3 : Force exercée par 2 ressorts (★★☆)

On fixe un mobile à deux murs par deux ressorts, de constantes de raideurs k_1 et k_2 et de longueurs à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}. Les points de fixation sont aux abscisses $x = 0$ et $x = L$.

Q1. Exprimez la résultante des forces de rappel élastiques subies par le mobile.

Q2. Montrez que l'ensemble des deux ressorts est équivalent à un unique ressort dont vous préciserez les caractéristiques.

Q3. Établir l'équation différentielle du mouvement de cet oscillateur.



Exercices d'entrainement

Exercice 5 : Bus et dos d'âne (résolution de problème) (★★☆)

Un bus vide (la caisse posée sur la suspension étant assimilée à un oscillateur harmonique vertical) passe au-dessus d'un dos d'âne, c'est-à-dire d'une bosse sur la chaussée. Il oscille alors verticalement à la fréquence f = 1,0 Hz. Au retour, le bus est rempli d'une cinquantaine de passagers de masse moyenne m = 60 kg. Au passage du dos d'âne, il oscille cette fois-ci à la fréquence f' = 0,8 Hz.

Q1. Quelle est la masse à vide M du bus ?

Exercice 6 : Viscosimètre oscillant (★★☆)

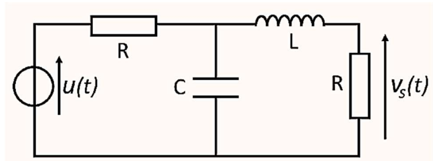
Une bille de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la bille est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi.\eta.r.\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

Q1. Établir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T des oscillations.

Q2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

Exercice 7 : Circuit d'ordre 2 (★★☆)

On étudie le circuit ci-contre :



$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ E \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Q1. Étudier les valeurs des tensions et courants dans le circuit à t < 0 en régime établi continu.

Q2. Déterminer l'équation différentielle dont $v_s(t)$ est solution en fonction de $\tau = R.C = L/R$.

Q3. Exprimer la pulsation propre du circuit ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction de τ.

Q4. Déterminer $v_s(t)$.

Q5. Tracer l'allure de $v_s(t)$.