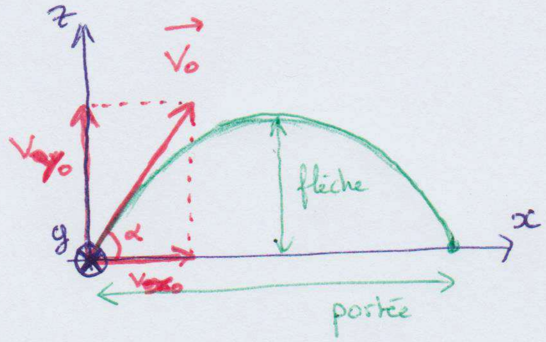
Exercice 5 : * système : {projectile} * référentiel : terrestre.

schéma



$$\vec{V_0} = \begin{cases} V_{x_0} = V_0 . \cos(\alpha) \\ V_{y_0} = 0 \\ V_{z_0} = V_0 . \sin(\alpha) \end{cases}$$

On connait l'accélération :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g . \end{cases}}$$

On en déduit la vitesse puisque $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

on cherche le type de fonction à dériver pour obtenir l'accélération fournie.

$$\vec{V}(t) = \begin{cases} V_x(t) = \cancel{C^{ste}_1}\ V_{x_0} \\ V_y(t) = \cancel{C^{ste}_2}\ V_{y_0} \\ V_z(t) = -g . t + \cancel{C^{ste}_3}\ V_{z_0} \end{cases}$$

grâce aux conditions initiales.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}(t) = \begin{cases} V_{x_0} \\ V_{y_0} = 0 \\ -g . t + V_{z_0} \end{cases}}$$

On en déduit les équations horaires de la position puisque $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

en fonction du temps

$$\vec{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = V_{x_0} . t + \cancel{C^{ste}_4}\ x_0 \\ y(t) = \cancel{C^{ste}_5}\ y_0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} . g . t^2 + V_{z_0} . t + \cancel{C^{ste}_6}\ z_0 \end{cases}$$

grâce aux conditions initiales. $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{OM} = \begin{cases} x(t) = V_{x_0} . t & (1) \\ y(t) = 0 & (2) \\ z(t) = -\frac{1}{2} . g . t^2 + V_{z_0} . t & (3) \end{cases}}$$

Q2 : Trajectoire : Grâce à (1) $\rightarrow \boxed{t = \frac{x}{V_{x_0}}}$

Dans (3) $\rightarrow \boxed{z(x) = -\frac{1}{2} . g . \left(\frac{x}{V_{x_0}}\right)^2 + V_{z_0} . \frac{x}{V_{x_0}}}$

Q3 : Portée p : Le système retombe au sol.

$$\hookrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{équation horaire}}}{z(t_f)} = 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trajectoire}}}{z(p)} = 0}$$

En utilisant la trajectoire :

$$0 = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{V_{x_0}^2}\cdot x + \frac{V_{z_0}}{V_{x_0}}\right) x.$$

$$\hookrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{point de départ}}}{x = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{2 V_{z_0} \cdot V_{x_0}}{g}}$$

Avec l'expression en fonction des angles :

$$p = \frac{2 V_0^2}{g} \times \cos(\alpha) \times \sin(\alpha) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule de trigo} \\ 2.\cos(\alpha).\sin(\alpha) = \sin(2\alpha).}}{=} \frac{V_0^2}{g} \times \sin(2\alpha).$$

portée : $\boxed{p = \frac{V_0^2}{g} \times \sin(2.\alpha)}$

Q4 : Pour maximiser la portée par rapport à l'angle α, on cherche où la dérivée de p par rapport à α s'annule :

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{V_0^2}{g} \times 2 \times \cos(2\alpha) = 0$$

$$\hookrightarrow \cos(2\alpha) = 0$$

$$\hookrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

on cherche une réponse entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}} \rightarrow \text{il faut lancer à } 45°$$

Q5 : Flèche → sommet de la trajectoire obtenue lorsque la vitesse verticale V_z s'annule → $\boxed{V_z(t_s) = 0}$

→ on atteint le sommet à la date $\boxed{t_s = \frac{V_{z_0}}{g}}$

Hauteur maximale → $z(t_s) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{V_{z_0}}{g}\right)^2 + V_{z_0} \cdot \frac{V_{z_0}}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{z_0}^2}{g}$

Flèche : $\boxed{z_{max} = \frac{1}{2} \frac{V_{z_0}^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2}{g} \cdot \sin^2(\alpha)}$