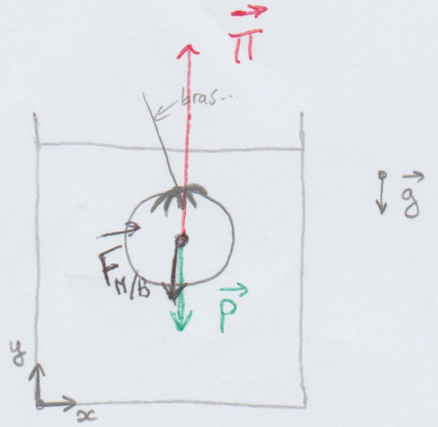
(1)

- Quelle Force pour maintenir un ballon de masse $m = 270 g$ et de rayon $R = 19 cm$ sous l'eau ?



* système : { ballon } assimilé à un point B.
* référentiel : terrestre, supposé galiléen
* base : cartésienne $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$
* bilan des forces extérieures :
  - poids : $\vec{P} = m.\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$
  - poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ +\rho_{eau}.V.g \end{pmatrix}$
  - Force de la main sur le ballon $\vec{F}_{M/B} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$

* 2ème loi de Newton (en fait ici cas particulier qui revient au principe d'inertie) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = \vec{0}$$

ballon immobile.

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{F}_{M/B} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ +\rho_{eau}.V.g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ sur Ox : $0 + 0 + F_x = 0 \Rightarrow \boxed{F_x = 0}$

→ sur Oy : $-m.g + \rho_{eau}.V.g + F_y = 0$

$\hookrightarrow \boxed{F_y = (m - \rho_{eau}.V).g}$

AN : $F_y = (m - \rho.\frac{4\pi}{3}R^3).g$

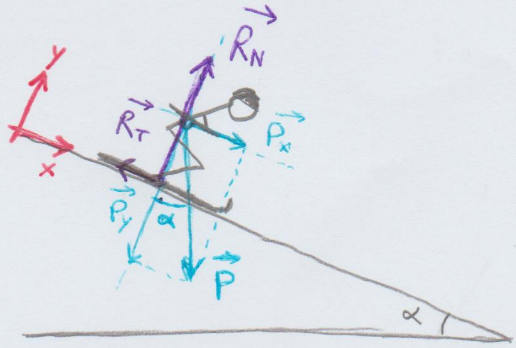
$= (0{,}270 - 1{,}0\times10^3 \times \frac{4\pi}{3} \times (0{,}19)^3).\ 9{,}8$

$= -2{,}8 \times 10^2\ N$

$\hookrightarrow \boxed{\vec{F}_{M/B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}8\times10^{-2} N \end{pmatrix}}$

- Détermination de l'accélération d'un skieur ~~de~~ de masse $m = 80\,kg$ sur une pente à $\alpha = 40°$.

Hypothèses : • Frottements avec l'air négligés.
• Frottement solide entre les skis et la neige de coeff. $f = 0{,}05$.
(Loi de Coulomb : $R_T = f . R_N$.)
(réaction tangentielle) (réaction normale)



* système : { skieur + skis }
* référentiel : terrestre, supposé galiléen.
* base : cartésienne $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ orientée selon la pente !
* Bilan des forces extérieures :

• poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} m.g.\sin(\alpha) \\ -m.g.\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

• réaction normale au support : $\vec{R_N} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix}$

• réaction tangentielle dûe aux frottements : $\vec{R_T} = \begin{pmatrix} -R_T = -f.R_N \\ 0 \end{pmatrix}$

* $2^{ème}$ loi de Newton / PFD :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m.\vec{a}$$

$$\hookrightarrow \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T} = m.\vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} m.g.\sin(\alpha) \\ -mg.\cos(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f.R_N \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ \cancel{a_y} \end{pmatrix}$$

0 car vitesse toujours nulle selon Oy (le skieur reste collé à la piste).

Sur Oy : $R_N = m.g.\cos(\alpha)$.

Sur Ox : $m\,a_x = mg.\sin(\alpha) - f.R_N = mg.\sin(\alpha) - f.m.g.\cos(\alpha)$.

$$\hookrightarrow \boxed{a_x = g \times (\sin(\alpha) - f.\cos(\alpha))}$$

AN : $a_x = 5{,}9\,m.s^{-1}$.

• indépendant de m !
• pour $\alpha = 90°$ on retrouve bien $a = g$ (axe orienté vers le bas)

Rmq : Angle minimum pour glisser dans ces conditions :

$$\sin(\alpha_{min}) - f.\cos(\alpha_{min}) = 0$$

$$\sin(\alpha_{min}) = f.\cos(\alpha_{min})$$

$$\tan(\alpha_{min}) = f$$

$$\boxed{\alpha_{min} = \arctan(f)}$$

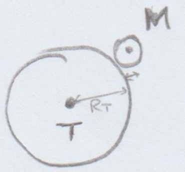
plus les frottements sont importants, plus l'angle minimum de la pente est grand.

ici : $\alpha_{min} = 2{,}9°$.

③ # Etude du mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

I. Champ de pesanteur uniforme

⚠ masses graves



Attraction gravitationnelle terrestre : $\overrightarrow{F_{T/M}} = - G \cdot \dfrac{m_M \cdot m_T}{(R_T + h)^2} \overrightarrow{u_{TM}}$

$\overrightarrow{F_{T/M}} = m_M \cdot \left(\dfrac{-G m_T}{(R_T)^2} \right) \overrightarrow{u_{TM}}$

vecteur ≃ c^{ste} si h varie peu devant R_T

$$\boxed{\vec{P} = m_M \times \vec{g}}$$

avec $\vec{g} = \dfrac{-G \cdot m_T}{{R_T}^2} \overrightarrow{u_{TM}}$

$g = + \dfrac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{(6,38 \times 10^{6})^2}$

$$\boxed{g = 9,78 \text{ m.s}^{-2}}$$

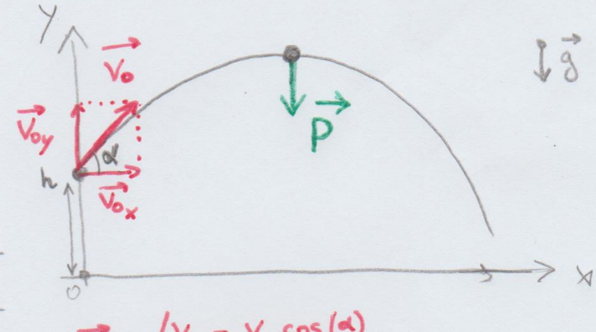
- hypothèse sphérique à revoir
  ↳ dépend du point du globe
- pseudo force centrifuge

II. Tir parabolique sans frottements

↳ trajectoire ?

- système : projectile de masse m.
- référentiel : terrestre, supposé galiléen.
- Base utilisée : cartésienne $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$
- Bilan des forces exterieures :
  - Poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$
  - Frottements $\vec{f}$: négligés $(\|\vec{P}\| > \|\vec{f}\|)$
  - poussée d'archimède négligée.

  } poids seulement = chute libre



$\vec{V_0} = \begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \cos(\alpha) \\ V_{0y} = V_0 \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$

- Principe fondamental de la dynamique ($m = c^{ste}$)

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

accélération $\boxed{\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}}$

- vitesse $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donc

$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) = \cancel{c^{ste}_1}\ V_{0x} \\ V_y(t) = -g \cdot t + \cancel{c^{ste}_2}\ V_{0y} \end{pmatrix}$ utilisation des conditions initiales $\begin{cases} V_x(0) = c^{ste}_1 = V_{0x} \\ V_y(0) = -g \cdot 0 + c^{ste}_2 = V_{0y} \end{cases}$

- position $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) = V_{0x} \cdot t + \cancel{c^{ste}_3}\ X_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + V_{0y} \cdot t + \cancel{c^{ste}_4}\ Y_0 \end{pmatrix}$ utilisations des conditions initiales $\begin{cases} x(0) = V_{0x} \cdot 0 + c^{ste}_3 = X_0 \\ y(0) = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + V_{0y} \cdot 0 + c^{ste}_4 = Y_0 \end{cases}$

Equations horaires :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) = V_{0x} \cdot t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + V_{0y} \cdot t + y_0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Trajectoire : $y = f(x)$

(1) $\rightarrow$ $t = \dfrac{x - x_0}{V_{0x}}$

dans (2) $\boxed{y(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x - x_0}{V_{0x}}\right)^2 + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}(x - x_0) + y_0}$

- avec les angles :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x - x_0}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha) \cdot (x - x_0) + y_0$$

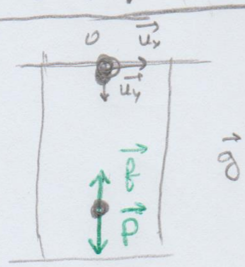
- pour notre problème :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha) \cdot x + h$$

Conditions particulières à connaître

- projectile au sol $\rightarrow$ $y = 0$
- projectile au sommet de la trajectoire $\rightarrow$ $V_y = 0$. $\xrightarrow[t]{} t_{sommet} \rightarrow$ dans équations horaires.

III. Chute verticale avec Frottements proportionnels à V ou V^2



- système : bille de masse m
- référentiel : terrestre, supposé galiléen (vers le bas)
- base : cartésienne $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$
- Bilan des forces extérieures
  - Poids : $\vec{P}$
  - frottements $\vec{f}$ → opposés au mouvement donc à la vitesse
  - poussée d'Archimède négligée
- PFD :

$$\vec{P} + \vec{f} = m.\vec{a}$$

Cas 1 : $\vec{f} = -k.\vec{V} = -k.V.\vec{u_y}$ (faible vitesse) — k : kg.s^{-1}

PFD : $\begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k.V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m.\frac{dV_y}{dt} \end{pmatrix}$ ← il ne se passe rien selon u_x !

sur (Oy) :

$$m.\frac{dV}{dt} + k.V = mg$$

$$\frac{m}{k}\frac{dV}{dt} + V = \frac{mg}{k}$$

Forme canonique :

$$\tau \frac{dV}{dt} + V = V_{lim}$$

avec : $\tau = \dfrac{m}{k}$

$V_{lim} = \dfrac{g.m}{k}$

↳ solution homogène : $V_h = A.e^{-t/\tau}$ $\left(\frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau} = 0\right)$

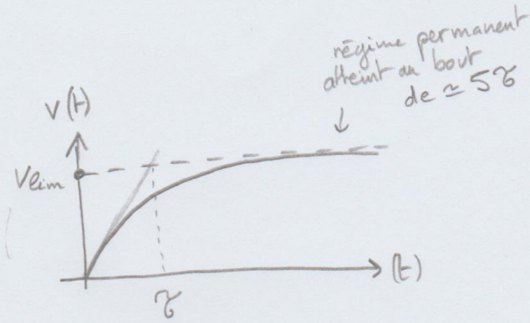
solution particulière : $V_p = V_{lim}$.

$$V = V_h + V_p = Ae^{-t/\tau} + V_{lim}$$

Détermination de A : condition initiale

- $V(0) = 0 = A.\underbrace{\cancel{e^{-0/\tau}}}_{1} + V_{lim} \rightarrow A = -V_{lim}.$

Donc $$\boxed{V(t) = V_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Cas 2 : $\vec{f} = -k.V.\vec{V} = -\cancel{k}\,\lambda\,V^2.\vec{u_y}$ ← kg.m⁻¹

PFD : $\begin{pmatrix} 0 \\ +mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda.V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m\frac{dV_y}{dt} \end{pmatrix}$

sur (Oy) $$m.\frac{dv}{dt} + \lambda.V^2 = m.g$$

on ne sait pas résoudre cette équa. diff non linéaire analytiquement
↳ résolution numérique.

→ Méthode d'Euler.

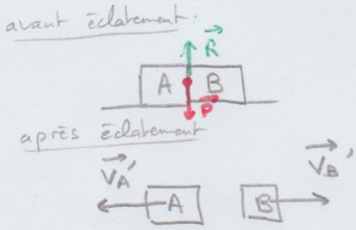
$$\boxed{\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} = g - \frac{\lambda}{m}.V_i^2 \quad \hookrightarrow V_{i+1} = V_i + \left(g - \frac{\lambda}{m}.V_i^2\right).\Delta t}$$

mais on peut faire un peu de physique.

vitesse limite : $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{limite} = \sqrt{\frac{m.g}{\lambda}}}$

* Propulsion par réaction → vitesses après éclatement du système.

- système : $\left\{ \text{partie A de masse } m_A + \text{partie B de masse } m_B \right\}$
- référentiel : terrestre supposé galiléen
- Forces extérieures
  - poids $\vec{P}$
  - réaction du support $\vec{R}$ } se compensent → système pseudo-isolé.
  - frottements négligés



- Théorème de la résultante cinétique :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{p} = c^{ste}}$$ (avant et après éclatement)

quantité de mvt :

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}_{avant} &= m_A.\vec{V_{0A}} + m_B.\vec{V_{0B}} = \vec{0} \\ \vec{p}_{après} &= m_A.\vec{V_A'} + m_B.\vec{V_B'} \end{aligned}\right\} \quad m_A.\vec{V_A'} + m_B.\vec{V_B'} = \vec{0}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{V_B'} = -\frac{m_A}{m_B}.\vec{V_A'}}$$

direction opposée

le plus léger est celui qui se déplace le plus rapidement.