

Signaux périodiques

Plan du cours

1. Qu'est-ce qu'un signal ?.....	1
2. Signal périodique	1
2.1. Définitions.....	1
2.2. Amplitude, valeur moyenne et valeur efficace	2
3. Signal sinusoïdal.....	3
3.1. Importance des signaux sinusoïdaux.....	3
3.2. Expression générale d'un signal sinusoïdal	3
3.3. Comparer deux signaux sinusoïdaux synchrones	4

1. Qu'est-ce qu'un signal ?

Définition : Grandeur physique

Une **grandeur physique** est une **propriété mesurable** d'un phénomène, d'un évènement, d'un corps.

Exemples : la position, la vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force...

Définition : Signal

Un **signal** correspond à l'**enregistrement** de la grandeur physique.

2. Signal périodique

2.1. Définitions

Définition : Signal périodique

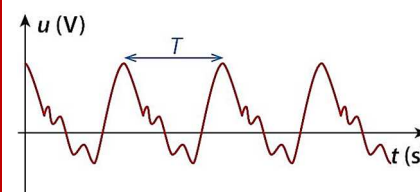
Signal périodique : Un signal est périodique correspond à la répétition d'un motif élémentaire.

Définitions : Caractéristiques d'un signal périodique

- La **période** T d'un signal sonore périodique correspond à la durée du motif qui se répète. Elle s'exprime en seconde (s).
- La **fréquence** f d'un signal sonore périodique correspond au nombre de motifs enregistrés en une seconde. Elle s'exprime en hertz (Hz).
- La fréquence et la période d'un signal périodique sont liées par la relation :

$$f = \frac{1}{T}$$

avec f en hertz (Hz) et T en seconde (s).



Représentation temporelle d'un son musical, périodique

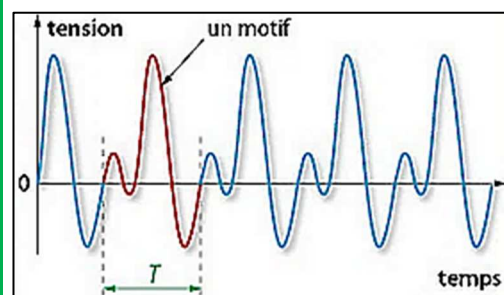
Méthode : Déterminer la fréquence d'un signal

- Identifier le **motif** qui se répète sur la courbe.
- En utilisant l'axe des abscisses, déterminer la durée de ce motif en seconde. Cette durée correspond à la **période** T du signal.

Pour augmenter la précision de la mesure d'une période, il faut faire la moyenne sur le plus grand nombre possible de motifs représentés.

- La **fréquence** f (en Hz) s'obtient en utilisant la relation :

$$f = \frac{1}{T}$$



2.2. Amplitude, valeur moyenne et valeur efficace

Définition : Amplitude

L'**amplitude** d'un signal est la moitié de l'écart entre les valeurs maximale $S_{\max}$ et minimale $S_{\min}$ du signal :

$$\text{amplitude} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2}$$

Définition : Valeur moyenne

On définit la valeur moyenne d'un signal périodique $s(t)$ de période T par la relation :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t).dt$$

Définition : Valeur efficace

On définit la **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$ de période T par la relation :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t).dt}$$

La valeur efficace correspond à la valeur qu'il faudrait imposer en *régime continu* pour obtenir la même puissance. La valeur efficace est importante physiquement : l'**énergie transportée** par un signal dépend de sa valeur efficace et non de sa moyenne.

Un signal de valeur moyenne nulle transporte une énergie proportionnelle à S_{eff}^2 .

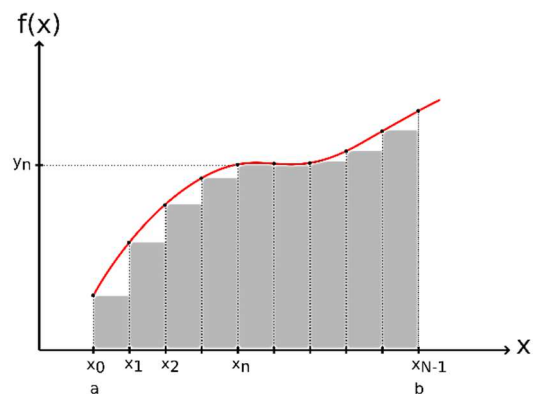
Afin de calculer les valeurs moyenne et efficace d'un signal nous sommes donc amenés à calculer des intégrales sur une période du signal. Pour cela, il est possible d'utiliser une méthode numérique.

Méthode : Calculer numériquement une intégrale (méthodes des rectangles à droite)

Avec cette méthode, on calcule l'intégrale numérique en réalisant une somme de surfaces de rectangles. Le domaine d'intégration est découpé en intervalles et on fait comme si la fonction restait constante sur chaque intervalle.

Sur chaque intervalle, on réalise ainsi l'approximation suivante :

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x).dx \approx f(x_n).(x_{n+1} - x_n)$$



Cela conduit au code Python suivant :

```
# calcul de l'intégrale de f entre a et b
def integration(f,a,b): # f est la fonction et a et b les bornes
    x = np.linspace(a,b,10000)
    integrale = 0
    for i in range(len(x)-1):
        integrale = integrale + f(x[i])*(x[i+1]-x[i])
    return integrale
```

3. Signal sinusoïdal

3.1. Importance des signaux sinusoïdaux

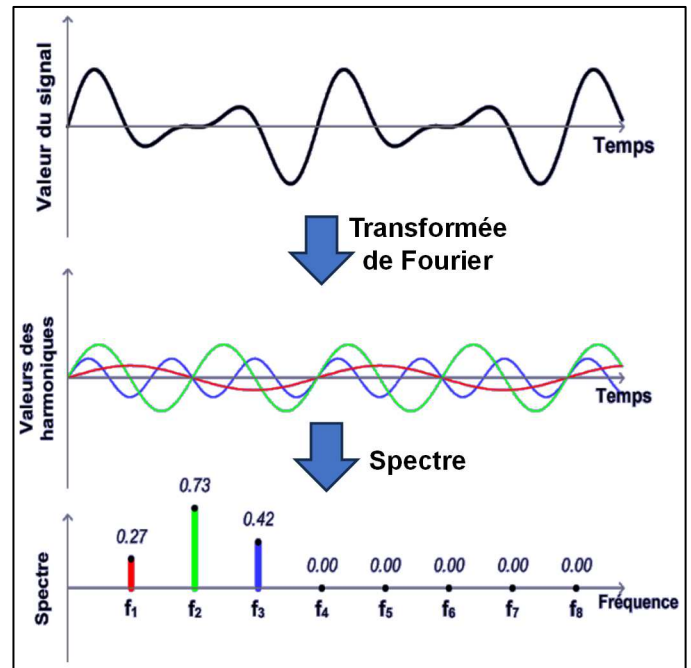
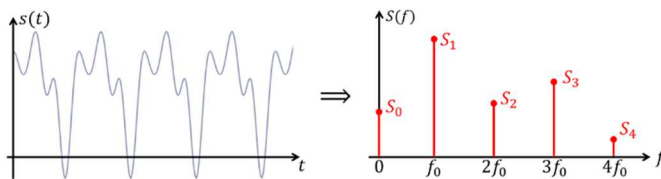
Loi : Théorème de Fourier

Tout **signal périodique** de fréquence f_0 se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f s'écrit :

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} S_k \cdot \cos(2\pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t + \varphi_k)$$

avec S_0 la valeur moyenne du signal (ou « composante continue »), S_k et φ_k des coefficients dépendant du signal (le détail de leur calcul dépasse le cadre de ce cours).

Les coefficients S_k sont les amplitudes des différentes composantes spectrales que l'on retrouve sur le spectre du signal $s(t)$:



Définitions : Spectre de Fourier et vocabulaire associé

- Un **spectre de Fourier**, ou spectre fréquentiel, est une représentation graphique permettant de visualiser l'amplitude des différentes composantes en fonction de la fréquence.
- Avec un **signal périodique**, le spectre se présente sous la forme de **pics**, situés au niveau de chaque fréquence intervenant dans le signal.
- Le pic présent à la fréquence du signal étudié s'appelle le **fondamental**.
- Les autres pics, présents pour des fréquences multiples de la fréquence fondamentale f_0 , s'appellent des **harmoniques**.

Propriété : Répartition de l'énergie sur les différentes harmoniques

L'**énergie totale** portée par le signal se répartit dans les différentes harmoniques de sa décomposition en série de Fourier, proportionnellement au carré de l'amplitude de chaque composante :

$$S_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} S_{k,eff}^2 = S_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{S_{k,max}^2}{2}$$

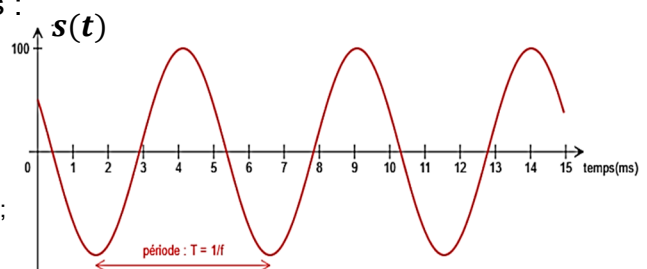
3.2. Expression générale d'un signal sinusoïdal

Définition : Signal sinusoïdal pur

On considère le cas d'un signal de la forme : $s(t) = S_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Les caractéristiques du signal sont les suivantes :

- **Pulsation** du signal : ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$;
- **Fréquence** du signal : $f = \omega / 2\pi$ en Hz ;
- **Période** du signal : $T = 2\pi / \omega$ en s ;
- **Amplitude** du signal : S_m (l'unité dépend du signal) ;
- **Phase à l'origine** : φ en radian.



Propriétés : Valeur moyenne et valeur efficace

Pour un signal sinusoïdal $s(t) = S_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$,

- Valeur moyenne : $\langle s(t) \rangle = 0$
- Valeur efficace : $S_{eff} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$ (point maths : retenir que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$)

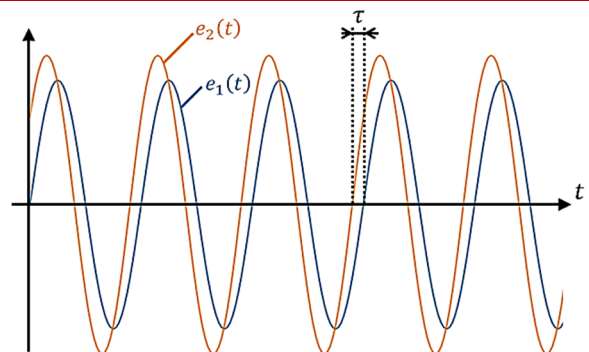
3.3. Comparer deux signaux sinusoïdaux synchrones**Définition : Déphasage**

Deux signaux synchrones $e_1(t) = E_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$ et $e_2(t) = E_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$ sont déphasés s'ils n'ont pas la même phase à l'origine : $\varphi_2 \neq \varphi_1$.

La **différence de phase à l'origine** entre deux signaux s'appelle le **déphasage**. C'est une valeur algébrique dont le signe dépend du choix du signal de référence.

En prenant le signal e_1 comme référence on peut dire que $e_2(t)$ est déphasé d'un déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ par rapport à $e_1(t)$.

- Si $\Delta\varphi > 0$: $e_2(t)$ est en avance de phase sur $e_1(t)$.
La durée τ est alors le retard de $e_1(t)$ sur $e_2(t)$.
Cas de la figure ci-contre.
- Si $\Delta\varphi < 0$: $e_2(t)$ est en retard de phase sur $e_1(t)$.
La durée τ est alors le retard de $e_2(t)$ sur $e_1(t)$.

**Définition : Mesurer un Déphasage sur une représentation temporelle**

Par une simple règle de trois, on peut déduire le déphasage $\Delta\varphi$ de la lecture du retard τ :

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\tau}{T}$$

avec T la période du signal. Le signe du déphasage est à déterminer en repérant si le signal est en avance ou en retard sur le signal de référence.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.	
Calcul approché d'une intégrale sur un segment par la méthode des rectangles.	Mettre en œuvre la méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée d'une intégrale sur un segment.	