Régime sinusoïdal forcé
Travaux Dirigés

La résonance des événements d'une vie sur l'avenir est le plus souvent une énigme.
Alice Ferney

En autonomie

Cahier d'entrainement : fiche 5 : 5.01 à 5.06

Savoir-faire

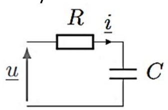
Savoir-faire 1 – Passer d'un signal à sa représentation complexe et inversement

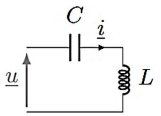
Donner l'amplitude complexe ou le signal réel dans les cas suivants, en supposant le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

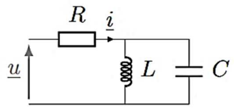
1/ $u(t) = U_0.cos(\omega.t + \frac{\pi}{4})$
2/ $i(t) = I\sqrt{2}.\cos(\omega.t - \psi)$
3/ $s(t) = S_m.\sin(\omega.t)$
4/ $\underline{U_m} = U_m.e^{-j\pi/3}$
5/ $\underline{U_1} = -\frac{jU_0}{R}$
6/ $\underline{I_m} = -I_m.e^{j\pi/6}$

Savoir-faire 2 – Déterminer des impédances équivalentes

Q1. Déterminer l'impédance complexe des dipôles ci-après. Écrire les résultats sous forme factorisée en faisant apparaître des grandeurs adimensionnées telles que $R.C.\omega$, $L.\omega/R$ ou $L.C.\omega^2$.



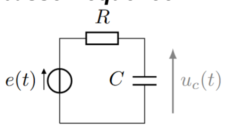




Savoir-faire 3 – Trouver le comportement équivalent à haute et basse fréquence

On considère le circuit ci-contre. On se place en RSF :

$$e(t) = E_0.\cos(\omega t)$$



Q1. Déterminer la valeur de la tension $u_c(t)$ dans le circuit lorsque $\omega \to 0$, et lorsque $\omega \to +\infty$.

Savoir-faire 4 – Etudier un circuit simple en complexe

On considère à nouveau un circuit RC série alimenté par une tension $e(t) = E_0.\cos(\omega t)$.

Q1. Quel est le signal complexe associé à $e(t)$? Comment s'exprime son amplitude complexe ?

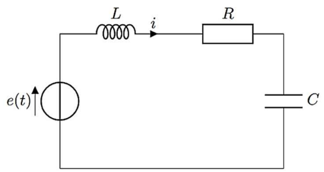
Q2. On cherche $u_c(t) = U_C.\cos(\omega t + \varphi)$. Comment s'écrit la grandeur complexe associée ? Et l'amplitude complexe ?

Q3. En étudiant le circuit, trouver l'expression de l'amplitude complexe de $u_c(t)$ en fonction de E_0, R, C, et ω.

Q4. Donner l'expression de l'amplitude et de la phase à l'origine du signal réel associé.

Savoir-faire 5 – Etudier la résonance en intensité d'un circuit RLC série

On considère un circuit RLC série, alimenté par un générateur idéal délivrant une tension $e(t) = E_0.\cos(\omega t)$. On s'intéresse ici au courant $i(t)$.



Q1. Par une étude asymptotique, donner la valeur du courant pour $\omega \to 0$, puis pour $\omega \to \infty$.

Q2. On cherche $i(t)$ sous la forme $i(t) = I_0.\cos(\omega t + \varphi)$. Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

Q3. Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit.

Q4. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I_0}$ de i en fonction de R, L, C, E_0 et ω. Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique $\underline{I_0} = \frac{E_0/R}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$ en introduisant la *pulsation propre* ω_0, le *facteur de qualité* Q, et la *pulsation réduite* $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

Q5. En déduire l'expression de l'amplitude I_0 du courant en fonction de x. Pour quelle valeur de x l'amplitude I_0 est-elle maximum ? Tracer l'allure de la courbe $I_0 = f(x)$. Pour quelle pulsation la résonance en intensité a-t-elle lieu ?

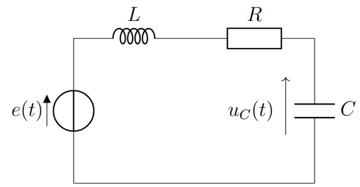
Q6. La bande passante $\Delta\omega$ est définie comme $|\omega_{c1} - \omega_{c2}|$, ces pulsations étant les pulsations de coupures, pour lesquelles l'amplitude est divisée par $\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximale. Établir l'expression de $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q. Comment varie-t-elle lorsque Q augmente ?

Q7. L'acuité de la résonance est définie comme $A_c = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$, avec ω_r la pulsation à la résonance. Donner son expression en fonction du facteur de qualité. Quelle est l'influence du facteur de qualité sur l'acuité de la résonance en intensité ? Représenter I_0 en fonction de la pulsation ω pour différentes valeurs de Q.

Q8. Déterminer en utilisant la question Q4 l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre l'intensité et la tension d'alimentation en fonction de x. Donner l'allure de la courbe associée en déterminant la valeur de $\Delta\varphi$ en hautes fréquences, en basses fréquences et à la résonance.

Savoir-faire 6 – Etudier la résonance en tension d'un circuit RLC série

On étudie le circuit ci-contre. Le générateur idéal de tension délivre une tension $e(t) = E_0.\cos(\omega t)$.



Q1. On cherche $u_c(t)$ sous la forme $u_c(t) = U_C.\cos(\omega t + \varphi)$. Par quelle expression complexe ce signal est-il représenté ?

Q2. Donner l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ de u_c en fonction de R, L, C, $\underline{E_0}$ et ω. Écrire ensuite cette expression sous la forme canonique

$$\underline{U_C} = \frac{\underline{E_0}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

en introduisant la *pulsation propre* ω_0, le *facteur de qualité* Q, et la *pulsation réduite* $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C.

Q3. En déduire l'expression de l'amplitude U_C de $u_C(t)$ en fonction de x. Quelle est sa valeur en $\omega = 0$? En ω_0 ? En $+\infty$?

Pour les plus courageux : Faire une étude afin de déterminer s'il y a existence d'une résonance. On établira l'expression de la position ω_r de cette résonance. Quelle est alors la valeur de la tension ?

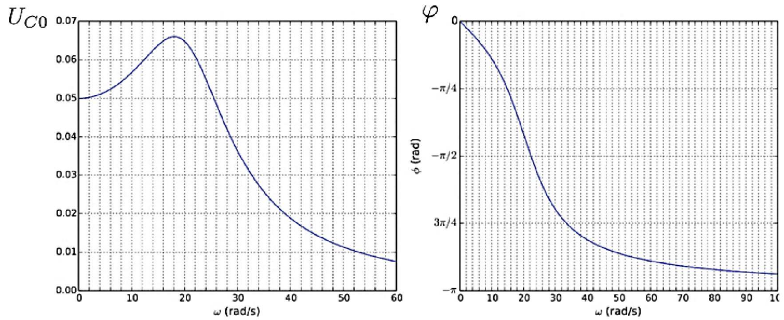
Q4. Tracer l'allure de la courbe $U_C = f(x)$ dans le cas où il y a résonance et dans le cas où il n'y a pas résonance.

Q5. En déduire également l'expression de la différence de phase $\Delta\varphi$ entre $u_c(t)$ et la tension d'alimentation $e(t)$ en fonction de x. Donner l'allure de la courbe en déterminant la valeur de $\Delta\varphi$ en hautes fréquences, en basses fréquences et en $x = 1$.

Savoir-faire 8 – Déterminer graphiquement la pulsation propre et le facteur de qualité

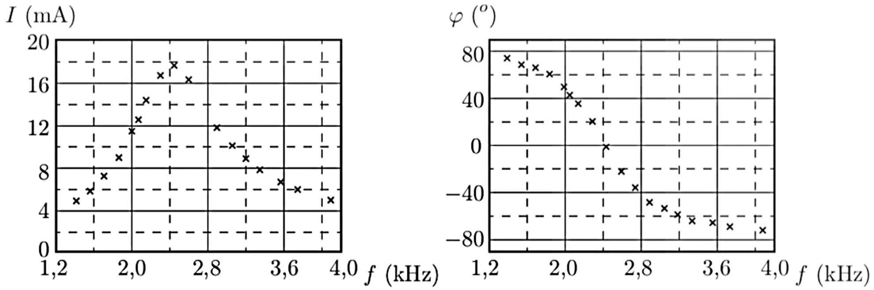
On étudie un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur. On réalise une acquisition de l'amplitude de cette tension et du déphasage entre cette tension et celle du générateur. Les ourbes obtenues sont données ci-dessous.

Q1. À partir des graphiques, estimer les valeurs de la pulsation propre ω_0 et de la pulsation de résonance du circuit ω_r, ainsi que celle du facteur de qualité Q.



On change ensuite les paramètres du circuit. On s'intéresse cette fois au suivi du courant. Les courbes obtenues sont données ci-dessous.

Q2. Déterminer les valeurs de la fréquence propre f_0, de la fréquence de résonance f_r, et du facteur de qualité Q.



Savoir-faire 9 – Passer de l'équation différentielle sur les grandeurs réelles à une relation entre les grandeurs complexes

On peut montrer, en appliquant le principe fondamental de la dynamique, que l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur amorti soumis à une force d'excitation $f(t) = F.\cos(\omega t)$ est la suivant :

$$m.\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha.\frac{dy}{dt} - k.y + F.\cos(\omega t)$$

Q1. En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Y}$ de $y(t)$ en fonction de F, α, m, k et ω.

Exercices incontournables

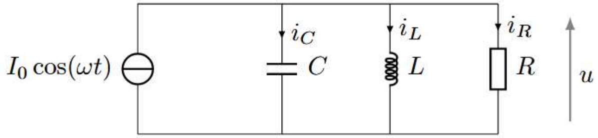
Exercice 1 : Antenne

L'antenne d'un émetteur est modélisée par un circuit électrique composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.

Le composant qui alimente l'antenne se comporte comme une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps :

$$i(t) = I_0.\cos(\omega t)$$

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension u aux bornes de l'antenne dépend de ω.



Q1. Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.

Q2. En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I_0 et des valeurs des composants.

Q3. Pour quelle pulsation l'amplitude U de u prend-elle sa valeur maximale notée U_{max} ?

Q4. Représenter le graphe donnant U/U_{max} en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

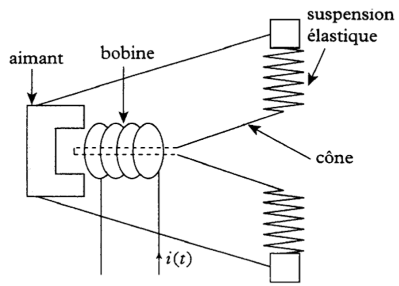
On se place dans le cas R = 37 Ω, L = 1,2.10^{-8} H et C = 2,3.10^{-10} F.

Q5. Caractériser quantitativement l'acuité de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

Q6. Quel est le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?

Exercice 2 : Modélisation d'un haut-parleur

On travaille dans le référentiel terrestre considéré galiléen $R_g(O, \overrightarrow{e_x}; \overrightarrow{e_y})$.



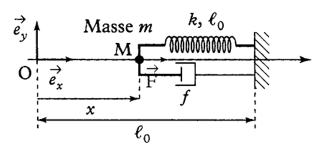
On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$.

Cette masse m, assimilée à un point matériel M, est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f.

Elle est soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur :

$$\vec{F}(t) = K.i(t).\overrightarrow{e_x} \text{ avec } K \text{ une constante.}$$

Modèle mécanique



On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal :

$$i(t) = I_m.cos(\omega.t)$$

<u>Données</u> :

m = 10 g ; k = 15000 N.m^{-1} ; K = 200 N.A^{-1} et I_m = 1 A.

Q1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position du point M. La normaliser sous forme canonique, et identifier les paramètres du système d'ordre 2.

Q2. On souhaite fixer le facteur de qualité à la valeur $Q = 1/\sqrt{2}$. Calculer alors la valeur du coefficient f.

Q3. Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$ sous la forme $x(t) = X_m.cos(\omega.t + \varphi)$ où on précisera les expressions de X_m et φ en fonction de ω.

Q4. Tracer l'allure de la courbe donnant $X_m(\omega)$.

Q5. Évaluer la bande passante du système.

Exercice 3 : Modèles équivalents

Les dipôles ci-dessous sont alimentés par une tension harmonique de pulsation ω.

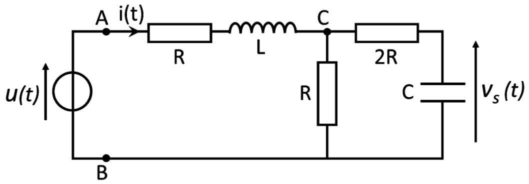
Q1. Déterminer, en fonction de ω, L' et R', les valeurs de R et L pour lesquelles il y a équivalence entre les deux dipôles.

Q2. Si l'on remplace la bobine d'inductance L par un condensateur de capacité C, peut-il toujours y avoir équivalence ?

Exercices d'entrainement

Exercice 4 : Étude d'un circuit R,L,C en régime sinusoïdal forcé

On étudie le circuit ci-contre :



Q1. A quoi correspond le régime sinusoïdal forcé ?

Q2. Donner l'expression des grandeurs complexes associées aux grandeurs électriques définies ci-dessous :

$$u(t) = U.\cos(\omega.t)$$
$$i(t) = I.\cos(\omega.t + \varphi)$$
$$v_s(t) = V_s.\cos(\omega.t + \psi)$$

Q3. Quelle relation lie $\underline{u}$, $\underline{i}$ et $\underline{Z_{AB}}$ l'impédance équivalente du dipôle AB?

Q4. En rappelant le comportement de la bobine et du condensateur en basses et en hautes fréquences, prévoir le comportement du circuit en ces deux limites.

Q5. En utilisant les lois d'association de dipôles, donner l'expression de $\underline{Z_{AB}}$. Vérifier les réponses à la question précédente à partir de l'expression obtenue.

Q6. En déduire les expressions de I et φ en fonction de la pulsation ω.

Q7. Donner l'expression de la tension complexe entre le point C et le point B : $\underline{u_{CB}}$.

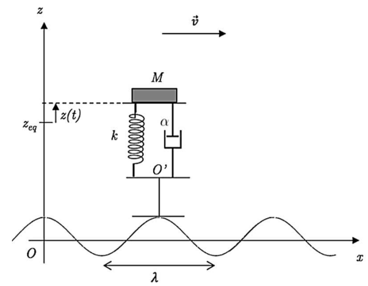
Q8. En déduire l'expression de la tension complexe $\underline{v_s}$ puis la fonction de transfert liant $\underline{v_s}$ et $\underline{u}$.

Q9. En déduire les expressions de V_s et de ψ.

Exercice 5 : Ski de bosse

Cet exercice s'intéresse à un skieur qui passe dans un champ de bosses. On se pose la question de la vitesse à choisir pour subir le moins possibles les oscillations de la piste.

On modélise le skieur et ses skis le plus simplement possible : une masse M pour le torse, en contact avec le sol via un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et un amortisseur de coefficient d'amortissement α pour l'ensemble {jambes+skis}, en contact ponctuel avec la neige (cf. schéma ci-contre).



Le skieur, animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v} = v_0.\overrightarrow{u_x}$, glisse sur une piste dont le profil impose à O' de suivre une cote $z_{O'}(t) = L + h(t)$ avec $h(t) = E_m.cos(\frac{2\pi.x(t)}{\lambda})$, $x(t)$ étant l'abscisse de O'.

On note $z_{éq}$ l'altitude du skieur lorsqu'il est à l'équilibre (skieur immobile au repos, pas de bosses donc $h(t) = 0$).

Le mouvement vertical du skieur est repéré par la côte z(t), qui est la différence la position du skieur et sa position $z_{éq}$ lorsqu'il est à l'équilibre.

On admet que la force exercée par l'amortisseur est $\vec{F} = -\alpha\left(\dot{z(t)} - \dot{z}_{O'}(t)\right)\overrightarrow{u_z}$.

Q1. Donner l'expression de $x(t)$ en supposant que O' se trouve à la verticale de O à l'instant initial. En déduire l'expression de la pulsation ω du forçage du système en fonction de λ et de v_0. On conservera la notation ω dans ce qui suit.

Q2. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la masse, et exprimer chaque force en fonction de $\overrightarrow{u_z}$ et des paramètres du problème (dont $z(t)$ et sa dérivée, L, $h(t)$ et sa dérivée, k, ℓ_0, α, $z_{éq}$).

Q3. On s'intéresse à la position d'équilibre. Montrer que $z_{éq}$ vérifie $-k\left(z_{éq} - L - \ell_0\right) - mg = 0$.

Q4. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.

On admet qu'elle se met sous la forme $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{z} + \omega_0^2.z(t) = \frac{\omega_0}{Q}.\dot{h} + \omega_0^2.h(t)$.

Q5. On notera Z_m l'amplitude complexe associée à $z(t)$.

Donner la forme du signal complexe associé à $z(t)$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_m}$. Montrer ensuite que l'amplitude Z_m des oscillations verticales du skieur est donnée par la relation :

$$Zm = \frac{\sqrt{1 + x^2/Q^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}} E_m$$

avec $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite.

Q6. Le graphique ci-contre montre l'évolution du rapport Z_m/E_m en fonction de x pour plusieurs valeurs de Q. Quelles sont alors les solutions pour réussir à descendre la piste sans trop de peine ?