Régime sinusoïdal forcé

Plan du cours

1. Le régime sinusoïdal forcé

1.1. Définition

Définition : Le régime sinusoïdal forcé (R.S.F.)

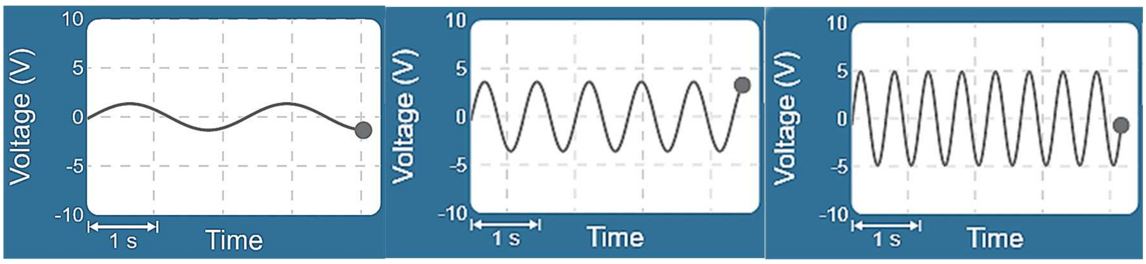
Grâce à un G.B.F., on soumet le circuit à une ***excitation sinusoïdal*** de pulsation ω. Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, toutes les grandeurs électriques oscillent de façon sinusoïdale à la même pulsation que l'excitateur.

On s'intéresse aux propriétés électriques des circuits ***une fois ce régime sinusoïdal installé***.

Remarque : le régime permanent est souvent atteint très rapidement.

1.2. Représentation des grandeurs en R.S.F.

Pour un système linéaire en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs évoluent avec une pulsation/fréquence identique à celle de l'excitation. Les autres propriétés (amplitude, phase à l'origine, ...) des signaux mesurés dépendent de cette fréquence.



Exemple de la tension aux bornes de la bobine dans un même circuit LR pour différentes fréquences.

Il est donc naturel de représenter les grandeurs auxquelles on s'intéresse en fonction de la pulsation/fréquence d'excitation. La plage de variation de cette fréquence peut s'étendre sur plusieurs ordres de grandeurs (de quelques Hz à plusieurs MHz pour les signaux électriques).

2. Représentation complexe

2.1. Principe

Définition : Représentation complexe

A une grandeur $x(t) = X.cos(\omega.t + \varphi)$ on associera la grandeur complexe :

$$\underline{x}(t) = X.\cos(\omega.t + \varphi) + j.X.\sin(\omega.t + \varphi) = X.e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}.e^{j\omega t}$$

- X est l'amplitude (réelle) de $x(t)$, φ est la phase (à l'origine) de $x(t)$;
- $\underline{x}(t)$ est appelée ***grandeur complexe*** (tension complexe, intensité complexe) ;
- $\underline{X} = X.e^{j\varphi}$ est appelée ***amplitude complexe***.

Notation : les grandeurs complexes sont soulignées.

Remarque 1 : Le signal complexe “n'existe pas”, c'est un outil.
Remarque 2 : L'unité imaginaire se note j (et non pas i) pour éviter des confusions avec le courant.

Méthode : Faire le lien entre grandeur réelle et grandeur complexe

- Le ***module*** de l'amplitude complexe donne l'amplitude du signal réel : $|\underline{X}| = X$
- L'***argument*** de l'amplitude complexe donne la phase à l'origine du signal réel : $\mathrm{Arg}(\underline{X}) = \varphi$
- La ***partie réelle*** de la grandeur complexe redonne x(t) : $\mathrm{Re}\left(\underline{x}(t)\right) = X.cos(\omega.t + \varphi) = x(t)$

2.2. Propriétés

Propriétés : Opérations en représentation complexe

- Les amplitudes complexes s'ajoutent : si $x(t) = x1(t) + x_2(t)$ alors $\underline{X} = \underline{X_1} + \underline{X_2}$.
- ***Dérivation par rapport au temps*** : dériver revient à multiplier par $j\omega$.

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \frac{d(\underline{X}.e^{j\omega t})}{dt} = j\omega.\underline{X}.e^{j\omega t} = j\omega.\underline{x}(t)$$

- ***Intégration par rapport au temps*** : intégrer revient à diviser par $j\omega$.

$$\int \underline{x}(t).dt = \int \underline{X}.e^{j\omega t}.dt = \frac{1}{j\omega}.\underline{X}.e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}.\underline{x}(t)$$

3. Etudier un circuit électrique en R.S.F.

3.1. Lois de Kirchhoff

Loi : Lois de Kirchhoff en complexe

La ***loi des nœuds*** et la ***loi des mailles*** s'appliquent de la même façon avec les courants et les tensions complexes qu'avec les grandeurs réelles.

3.2. Impédances complexes

Définition : Loi d'Ohm généralisée

Pour tout dipôle linéaire, le courant i traversant le dipôle et la tension u aux bornes du dipôle sont liés par une relation de proportionnalité :

$$\underline{u} = \underline{Z}.\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i} = \underline{Y}.\underline{u}$$

$\underline{Z}$ est appelée ***impédance complexe*** (module exprimé en Ω) ;
$\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ est appelée ***admittance complexe*** (module en Ω^{-1} ou siemens S).

- Le ***module de l'impédance complexe*** nous donne alors accès au rapport des amplitudes :

$$U/I = |\underline{Z}|$$

- L'***argument de l'impédance complexe*** nous donne alors accès au déphasage entre le courant et la tension : $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \mathrm{Arg}(\underline{u}) - \mathrm{Arg}(\underline{i}) = \mathrm{Arg}(\underline{Z})$.

A connaitre par ❤		Résistance	Condensateur	Bobine
Loi de comportement		$u = R.i$	$i = C.\frac{du}{dt}$	$u = L.\frac{di}{dt}$
Impédance complexe $\underline{Z}$		R	$\frac{1}{jC\omega}$	$jL\omega$
Admittance complexe $\underline{Y}$		$\frac{1}{R}$	$jC\omega$	$\frac{1}{jL\omega}$
Déphasage $\Delta\varphi$ (tension-courant)		0	$-\frac{\pi}{2}$ (tension en retard)	$+\frac{\pi}{2}$ (tension en avance)
Comportement limite	B.F. $(\omega \to 0)$	R	Circuit ouvert $(Z \to \infty)$	Fil $(Z \to 0)$
	H.F. $(\omega \to \infty)$	R	Fil $(Z \to 0)$	Circuit ouvert $(Z \to \infty)$

3.3. Association de dipôles et pont correspondant

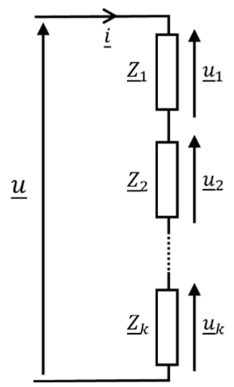
Méthode : Dipôles en série

- ***Impédance équivalente*** de dipôles en série :

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \Sigma_k(\underline{Z}_k)}$$

- ***Pont diviseur de tension*** :

$$\boxed{\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k.\underline{u}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{\underline{Z}_k.\underline{u}}{\Sigma_k(\underline{Z}_k)}}$$



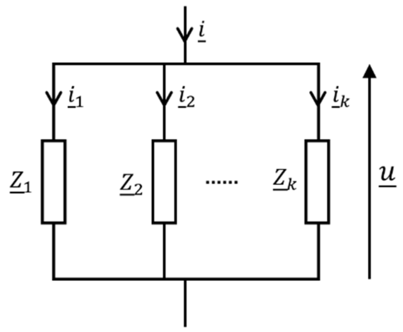
Méthode : Dipôles en parallèle

- Impédance équivalente de dipôles en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \Sigma_k\left(\frac{1}{\underline{Z}_k}\right)$
- ***Admittance équivalente*** de dipôles en parallèle :

$$\boxed{\underline{Y}_{eq} = \Sigma_k(\underline{Y}_k)}$$

- ***Pont diviseur de courant*** :

$$\boxed{\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k.\underline{i}}{\underline{Y}_{eq}} = \frac{\underline{Y}_k.\underline{i}}{\Sigma_k(\underline{Y}_k)}}$$



4. Phénomène de résonance

4.1. Définition

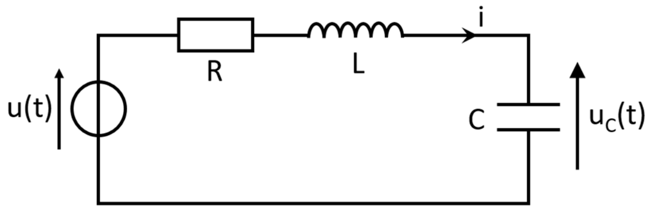
Définition : Résonance

Soit un système dont l'entrée est forcée par un signal harmonique de pulsation ω.

Il y a ***résonance*** si, pour une valeur particulière de ω (appelée ***pulsation de résonance*** et notée ω_r), une des grandeurs du système ***oscille avec une amplitude très importante***.

4.2. Exemple du circuit RLC

Un dipôle RLC série est alimenté par un générateur de tension de pulsation ω et d'amplitude $U = cste$: $u(t) = U.\cos(\omega.t)$.



On souhaite étudier la valeur de l'amplitude du courant i et la valeur de l'amplitude de u_c, la tension aux bornes du condensateur, en fonction de la pulsation ω.
Pour le circuit RLC série on continue d'utiliser en R.S.F. les grandeurs définies pour décrire le régime transitoire :

- La ***pulsation propre*** : $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$
- Le ***facteur de qualité*** $\boxed{Q = \frac{1}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}}$

4.2.1. Résonance en intensité

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\underline{U}}{R.(1 + jQ.(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \Rightarrow I = |\underline{I}| = \frac{U}{R\sqrt{1 + Q^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

L'amplitude du courant I est maximale pour $\boxed{\omega_r = \omega_0}$ et alors $I(\omega_0) = I_{max} = U/R$.
A la résonance en intensité, le courant $i(t)$ et la tension d'excitation $u(t)$ sont en phase :

$$\boxed{\Delta\varphi(\omega_0) = 0}$$

4.2.2. Caractéristique de la résonance : la bande passante

Définition : Bande passante

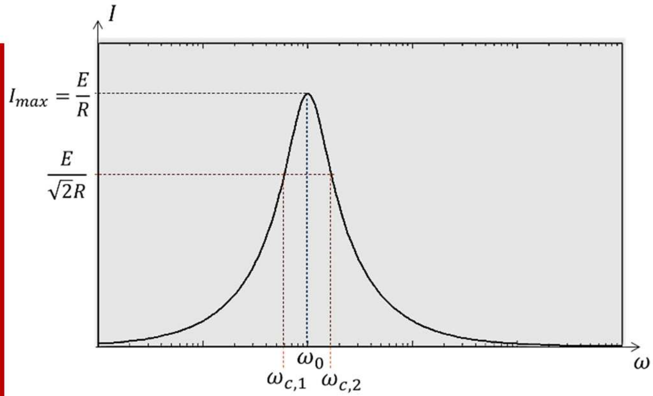
La ***bande passante*** est l'ensemble des pulsations pour lesquelles le signal d'intérêt n'est pas trop atténué.

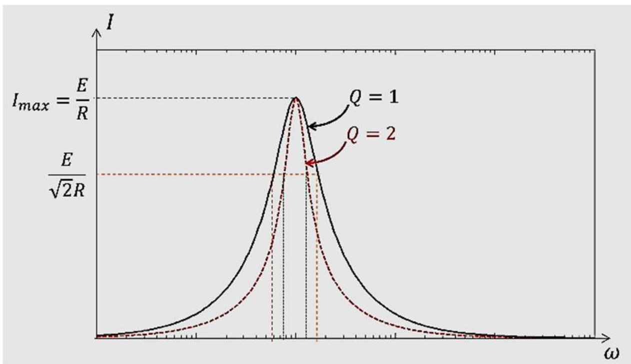
Les ***pulsations de coupure*** $\omega_{c,i}$ sont les pulsations qui délimitent la bande passante.

Par convention, ce sont les pulsations pour lesquelles l'amplitude X de la grandeur d'intérêt est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$: la pulsation de coupure ω_c est telle que

$$X(\omega_c) = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

Il y a en général deux pulsations de coupures, $\omega_{c,1}$ et $\omega_{c,2}$. La ***largeur de la bande passante*** est définie comme $\Delta\omega = |\omega_{c,1} - \omega_{c,2}|$.





Plus le facteur de qualité $\boldsymbol{Q}$ est grand, plus la résonance est ***aigüe*** (bande passante plus faible).

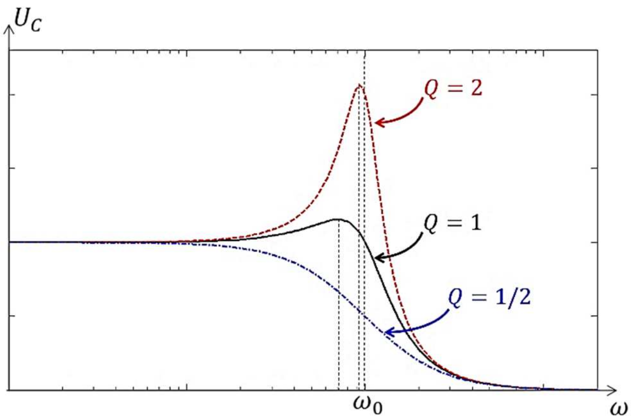
Définition : Acuité de la résonance

L'***acuité de la résonance*** A_r est définie par :

$$A_r = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

Pour la résonance en intensité du RLC : $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$

4.2.3. Résonance en tension aux bornes du condensateur



$$\underline{U_c} = \frac{\underline{U}}{jC\omega.\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)} = \frac{\underline{U}}{j\frac{1}{Q}.\frac{\omega}{\omega_0}.\left(1 + jQ.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow U_c = \left|\underline{U_c}\right| = \frac{U}{\frac{1}{Q}.\frac{\omega}{\omega_0}.\sqrt{1 + Q^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Si $Q > \sqrt{2}/2$, l'amplitude de la tension U_c est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Si $Q > \sqrt{2}/2$, l'amplitude maximale de la tension $U_c(\omega_r)$ obtenue à la résonance est supérieure à la tension d'excitation U.

À la pulsation propre ω_0 :
- l'amplitude vaut Q fois l'amplitude en régime continu ($\omega \to 0$).
- le déphasage $\Delta\varphi$ vaut $-\pi/2$. ($u_C(t)$ et $e(t)$ sont alors en quadrature, avec $u_C(t)$ en retard sur $e(t)$).

4.2.4. Détermination graphique des caractéristiques du circuit

Méthode : Détermination graphique des caractéristiques (résonance en intensité)

1. Sur la ***courbe de phase***, repérer la pulsation (ou la fréquence) pour laquelle le déphasage vaut 0 ➔ elle correspond à la ***pulsation propre*** ω_0 (ou $fréquence\ propre$) du circuit.

1. *(alternative)* Sur la ***courbe de l'amplitude***, repérer la pulsation (ou la fréquence) pour laquelle l'amplitude est maximale (résonance) ➔ elle correspond à la ***pulsation propre*** ω_0 (ou fréquence) du circuit.

2. Sur la ***courbe de l'amplitude***, déterminer l'acuité de la résonance en utilisant la pulsation propre déterminée précédemment. Sa valeur est égale au ***facteur de qualité*** Q.

Méthode : Détermination graphique des caractéristiques (résonance en tension)

1. Sur la ***courbe de phase***, repérer la pulsation (ou la fréquence) pour laquelle le déphasage vaut $-\pi/2$ ➔ elle correspond à la ***pulsation propre*** ω_0 (ou $fréquence\ propre$) du circuit.

2. Sur la ***courbe de l'amplitude***, repérer la pulsation (ou la fréquence) pour laquelle l'amplitude est maximale (résonance) ➔ elle correspond à la ***pulsation de résonance*** ω_r (ou fréquence) du circuit.

3. Sur la ***courbe de l'amplitude***, faire le rapport entre l'amplitude $U(\omega_0)$ et l'amplitude en régime continu $U(\omega \to 0)$: le résultat est égal au ***facteur de qualité*** Q.

3. *(alternative)* $Q = \sqrt{\frac{1}{2.\left(1-\left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2\right)}}$

5. Analogie électro-mécanique en R.S.F.

L'utilisation de la notation complexe ne se limitent pas à l'électronique : ils peuvent notamment s'appliquer pour l'étude de systèmes mécaniques.

La correspondance électromécanique est donnée dans le tableau du chapitre SL1.

Méthode : Utilisation de la représentation complexe pour un système mécanique

Pour l'étude de systèmes mécaniques, on n'utilise pas les impédances complexes mais on transforme l'équation différentielle du mouvement en représentation complexe en utilisant la propriété pour la dérivation d'une grandeur complexe : $\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega.\underline{x}(t)$.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Impédances complexes.	▪ Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.	
Association de deux impédances.	▪ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.	
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	▪ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. ▪ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. ▪ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. ▪ ***Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.***	