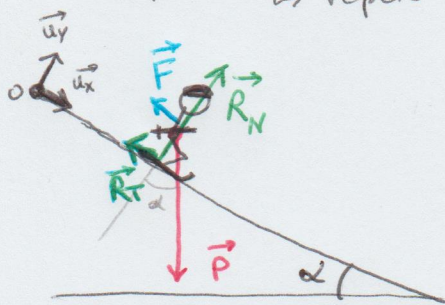


Exercice : Descente à skis

* système : {skieur}

* référentiel : terrestre supposé galiléen
 ↳ repère cartésien (O, x, y)



* bilan des forces

* poids : $\vec{P} = \begin{pmatrix} m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \\ -m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

* réaction du support $\vec{R} = \begin{pmatrix} -f \cdot R_N \\ R_N \end{pmatrix}$ ← Loi de Coulomb

* Frottements fluides de l'air $\vec{F} = \begin{pmatrix} -\lambda v \\ 0 \end{pmatrix}$ ← vitesse seulement selon $\vec{u}_x$

* 2^{ème} loi de Newton (système fermé)

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{pas de mvt du skieur selon } \vec{u}_y.$$

↳ Q1 : Sur (Oy) : $-m \cdot g \cdot \cos(\alpha) + R_N = 0 \Rightarrow \boxed{R_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)}$

Q2 : Sur (Ox) : $m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - f \cdot R_N - \lambda \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt}$
 ↳ $m \cdot g \cdot (\sin(\alpha) - f \cdot \cos(\alpha)) - \lambda \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (1)$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\frac{dv}{dt} = 0$

↳ $\boxed{V_{\text{limite}} = \frac{m \cdot g}{\lambda} (\sin(\alpha) - f \cdot \cos(\alpha))}$

AN : $V_{\text{limite}} = 52,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 190 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Q3 : On résout (1) mise sous forme adimensionnée :

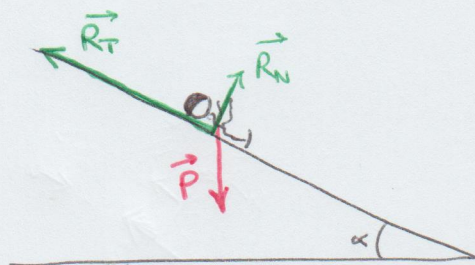
$$\tau \cdot \frac{d\left(\frac{v}{V_{\text{limite}}}\right)}{dt} + \frac{v}{V_{\text{limite}}} = 1$$

avec $\boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$

$$\boxed{v(t) = V_{\text{limite}} (1 - e^{-t/\tau})}$$

Q4 : $v(t_1) = \frac{V_{\text{limite}}}{2} = V_{\text{limite}} (1 - e^{-t_1/\tau}) \rightarrow e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln(2)}$
 AN : $t_1 = 5,5 \text{ s}$

Q5 : Nouvelle situation $\rightarrow$ nouveau bilan des forces



2^{ème} loi de Newton (système fermé)

$$\vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a} = m \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a toujours $R_N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$
mais $\|\vec{R}_T\| = f' \cdot R_N$ avec $f' = 5$.

Sur Ox :
$$\underbrace{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f'}_{\text{constante négative}} = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

 $\rightarrow$ la vitesse décroît

En intégrant $V(t') = \underbrace{m \cdot g(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot f')}_{\leftarrow \text{vitesse lors de la chute } (\frac{V_{\text{limite}}}{2})} \cdot t' + V_0$
 $\leftarrow t' = 0$ au moment de la chute.

Le skieur s'arrête pour $v(t'_f) = 0$

$$\rightarrow \boxed{t'_f = \frac{V_0}{g(\cos(\alpha) \cdot f' - \sin(\alpha))}}$$

Comme $v = \frac{dx}{dt}$, en intégrant :

$$x(t') = \frac{1}{2} g(\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot f') \cdot t'^2 + V_0 \cdot t' + x_0$$

$\leftarrow$ position au moment de la chute.

Quand le skieur s'arrête, il a parcouru une distance

$$\boxed{x(t'_f) - x_0 = \frac{V_0^2}{2g(\cos(\alpha) \cdot f' - \sin(\alpha))}}$$

AN : 12,5m

on retrouve l'expression de la distance de freinage à accélération constante !
(2,82g).

Q6 : En reprenant l'équation (1) avec $\vec{F} = -\frac{k \cdot S \cdot v \cdot \vec{v}}{2}$ et en négligeant $\vec{R}_T$.

$$\rightarrow \boxed{m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{k \cdot S \cdot v^2}{2} = m \cdot \frac{dv}{dt}}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\rightarrow \boxed{V_{\text{limite}} = \sqrt{\frac{2 m \cdot g \cdot \sin(\alpha)}{k \cdot S}}}$$

AN : 68 m.s⁻¹

(245 km.h⁻¹)

(Record du kilomètre lancé
à 255 km.h⁻¹)