Exercice 1 : Etude d'un circuit LC.

Q1 $E_{tot} = E_c + E_L = \frac{1}{2} C . u^2 + \frac{1}{2} . L . i^2$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{1}{2} \times C \times \left(2 u . \frac{du}{dt}\right) + \frac{1}{2} \times L \times \left(2 \times i . \frac{di}{dt}\right)$$

or $u = L . \frac{di}{dt}$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{dE_{tot}}{dt} = C \times u \times L . \frac{d^2 i}{dt^2} + i \times u}$$

Q2 : Aucun élément ne dissipe de l'énergie (pas de résistance R)

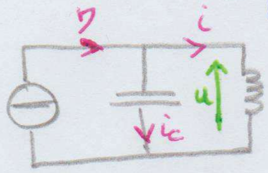
$$\hookrightarrow E_{tot} = c^{ste} \rightarrow \frac{dE_{tot}}{dt} = 0$$

On en déduit que

$$\boxed{LC \times \frac{d^2 i}{dt^2} + i = 0} \xrightarrow[\text{canonique}]{\text{sous forme}} \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} . i = 0}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Avec les lois de Kirchhoff :



$\begin{cases} \text{loi des noeuds : } \eta = i + i_c \\ \text{loi des mailles : même tension aux bornes de L et C} \end{cases}$

Loi de comportement :

$u = L . \frac{di}{dt}$

$i_c = C . \frac{du}{dt} \longrightarrow \eta - i = LC \times \frac{d^2 i}{dt^2}$

or pour $t > 0^+$, $\eta = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

Q3 : A $t = 0^-$

bobine → fil $\longrightarrow \boxed{u = 0}$

condensateur → circuit-ouvert $\rightarrow \boxed{i_c = 0} \rightarrow \boxed{\eta = i}$

A $t = 0^+$

bobine : continuité du courant $\rightarrow \boxed{i(0^+) = \eta}$

condensateur : continuité de la tension $u(0^+) = 0$. or $u = L . \frac{di}{dt}$ donc $\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = 0}$

Q4 : D'après l'équation différentielle :

$i(t) = A . \cos(\omega_0 . t) + B . \sin(\omega_0 . t)$

conditions initiales

$i(0^+) = \boxed{\eta = A}$

$\frac{di}{dt}(0^+) = 0 = B . \omega_0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

$$\boxed{i(t) = \eta . \cos(\omega_0 . t)}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$