# Filtrage linéaire

## Plan du cours



# 1. Généralités sur les filtres

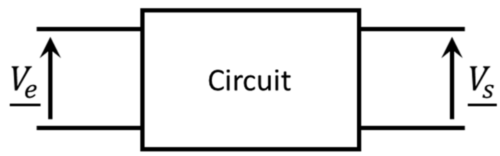
## 1.1. Définition

**Définition : Filtre**

Un ***filtre*** est un système qui permet de sélectionner des signaux utiles, sur un critère de fréquence.

On se limite cette année à l'étude des ***filtres linéaires*** (on peut donc appliquer le théorème de superposition).

## 1.2. Fonction de transfert




On étudie un circuit en régime sinusoïdal forcé.
Un signal $v_e(t) = V_e.\cos(\omega.t + \varphi_e)$ est envoyé en entrée du circuit et le signal $v_s(t) = V_s.\cos(\omega.t + \varphi_s)$ est récupéré en sortie.
On note $\underline{v_e} = \underline{V_e}\, e^{j\omega.t}$ et $\underline{v_s} = \underline{V_s}\, e^{j\omega.t}$ les grandeurs complexes associées.

**Définition : Fonction de transfert**

La fonction de transfert d'un filtre est une grandeur complexe définie comme le rapport de l'amplitude complexe $\underline{V_s}$ du signal de sortie et de l'amplitude complexe $\underline{V_e}$ du signal d'entrée :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{V_s}{V_e}\, e^{j\Delta\varphi}}$$

La fonction de transfert contient toute l'information sur le filtre.

**Définition : Gain** *($G$ vs. $G_{dB}$)*

- Le ***gain*** $G$ du filtre est défini comme le rapport des amplitudes réelles : $\boxed{G(\omega) = \frac{V_s}{V_e} = |\underline{H}(\omega)|}$

  Le gain dépend donc de la pulsation/fréquence.
- La valeur du gain pouvant s'étendre sur plusieurs ordres de grandeur, on utilise souvent le ***gain en décibel*** $G_{dB}$ défini par : $\boxed{G_{dB} = 20.\log(G)}$

**Méthode : De la fonction de transfert au signal de sortie**

Pour ***déterminer l'amplitude réelle $V_s$ du signal de sortie***, on utilise le gain du filtre à la pulsation (ou fréquence) du signal : $\boxed{V_s = V_e.G(\omega) = V_e.\left|\underline{H}(\omega)\right|}$

Pour ***déterminer la phase à l'origine $\varphi_s$ du signal de sortie***, on utilise l'argument de la fonction de transfert du filtre à la pulsation (ou fréquence) du signal, puisque $\Delta\varphi = \arg\left(\underline{H}(\omega)\right)$ :

$$\boxed{\varphi_s = \varphi_e + \arg\left(\underline{H}(\omega)\right)}$$

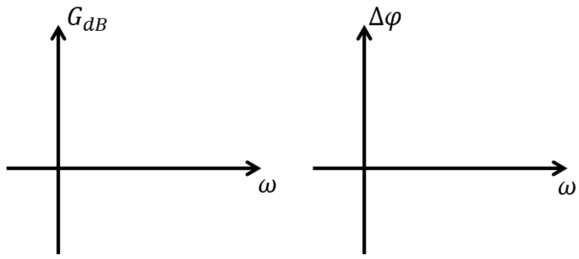
## 1.3. Diagramme de Bode

**Définition : Diagramme de Bode**

On appelle « ***diagramme de Bode*** » l'ensemble des ***<u>deux</u> graphiques*** :

- Tracé du ***gain*** ($G$ ou $G_{dB}$) en fonction de la pulsation $\omega$ ou de la fréquence $f$ du signal d'entrée.
- Tracé du ***déphasage*** $\Delta\varphi$ en fonction $\omega$.

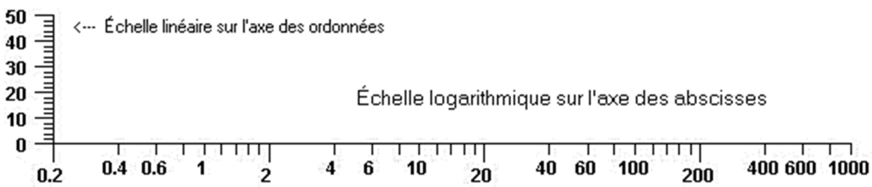
On utilise une *échelle logarithmique* pour représenter la pulsation $\omega$ : sur ces graphiques, une ***décade*** représente la multiplication par 10 de $\omega$ (ou de $f$ ).




**Méthode : Echelle linéaire vs. échelle logarithmique**

Pour une ***échelle linéaire***, si l'écart sur un axe $x$ entre deux points A et B est identique à l'écart entre deux points C et D, cela signifie que $x_A - x_B = x_C - x_D$.

Pour une ***échelle logarithmique***, si l'écart sur un axe $x$ entre deux points A et B est identique à l'écart entre deux points C et D, cela signifie que $\frac{x_A}{x_B} = \frac{x_C}{x_D}$.




https://fr.wikipedia.org/wiki/Echelle_logarithmique

## 1.4. Pulsation de coupure

**Définition : Pulsation de coupue $\omega_c$**

Une ***pulsation de coupure*** $\omega_c$ est une pulsation pour laquelle le gain $G_{max}/\sqrt{2}$ :

$$\boxed{G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$$

La condition sur le gain en décibel devient : $G_{dB}(\omega_c) = 20.\log\left(\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}\right) \approx G_{dB,max} - 3\text{dB}$

On utilise donc également le terme ***pulsation de coupure à -3dB*** pour $\omega_c$.

*Remarque* : Il peut y avoir une ou deux pulsations de coupure.

**Définition : Bande passante**

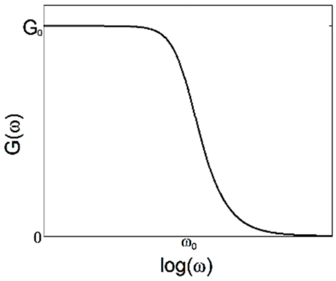
La ***bande passante*** $\Delta\omega$ est définie comme la gamme de pulsations telles que :

$$\omega \in \Delta\omega \iff \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(\omega) \leq G_{max}$$

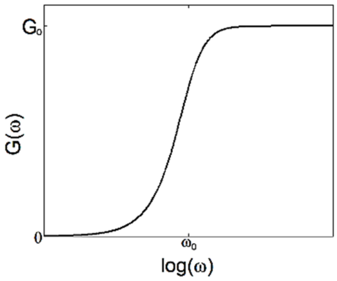
ou encore :

$$\omega \in \Delta\omega \iff G_{dB,max} - 3\text{dB} \leq G(\omega) \leq G_{dB,max}$$

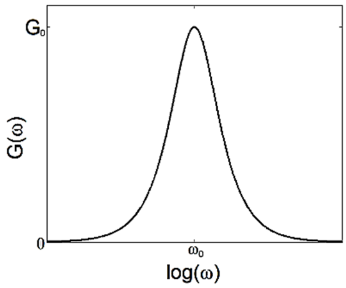
## 1.5. Différents types de filtres



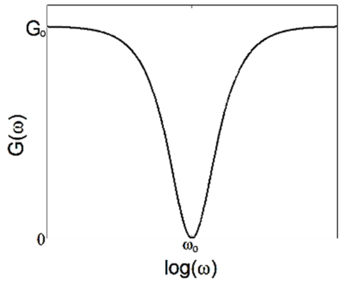

***Passe-bas***




***Passe-haut***




***Passe-bande***




***Coupe-bande***

**Définition : Ordre d'un filtre**

On classe également les filtres selon leur ***ordre*** : l'ordre d'un filtre est défini par l'ordre de l'équation différentielle linéaire associé (le degré de dérivation le plus élevé).
Cela revient à considérer l'ordre le plus élevé des polynômes dans la fonction de transfert.

## 1.6. Comportement asymptotique d'un filtre

**Méthode : Détermination rapide de la nature d'un filtre**

Pour déterminer rapidement la nature d'un filtre sans calculer la fonction de transfert, on devine le comportement du filtre à basse et à haute fréquence en remplaçant dans les deux cas les bobines et les condensateurs par leur équivalent aux limites.

***Pour rappel*** :

- En <u>basses fréquences</u> : ***condensateur ⇔ circuit ouvert*** et ***bobine ⇔ fil***
- En <u>hautes fréquences</u> : ***condensateur ⇔ fil*** et ***bobine ⇔ circuit ouvert***

**Méthode : Diagramme de Bode asymptotique**

On peut avoir le comportement du gain et de la phase à hautes et basses fréquences sans déterminer exactement le diagramme de Bode : il faut considérer respectivement les cas limites $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$ et $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$ afin de simplifier la fonction de transfert $H(\omega)$. Celle-ci se met alors sous la forme $H(\omega) = K.(j\omega)^n$.

On obtient alors sur la courbe de gain en décibel $G_{dB} = 20.\log(|H|)$ les possibilités suivantes :

- $n = 0$ : $G_{dB} = 20.\log(K)$ → l'asymptote est une droite horizontale.
- $n = 1$ : $G_{dB} = 20.\log(K) + 20.\log(\omega)$ → l'asymptote est une droite de pente +20dB/décade.
- $n = 2$ : $G_{dB} = 20.\log(K) + 40.\log(\omega)$ → l'asymptote est une droite de pente +40dB/décade.
- $n = -1$ : $G_{dB} = 20.\log(K) - 20.\log(\omega)$ → l'asymptote est une droite de pente -20dB/décade.
- $n = -2$ : $G_{dB} = 20.\log(K) - 40.\log(\omega)$ → l'asymptote est une droite de pente -40dB/décade.

**Méthode : Interpréter le diagramme de Bode asymptotique**

- <u>Savoir repérer un *dérivateur*</u> :

Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de ***pente +20 dB/décade***, alors il aura un comportement ***dérivateur sur cette gamme de fréquence*** car alors $H(\omega)$ est proportionnel à $j\omega$ (opération de dérivation en complexe).

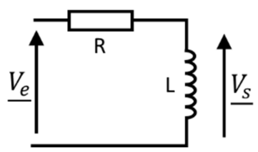
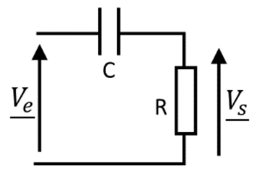
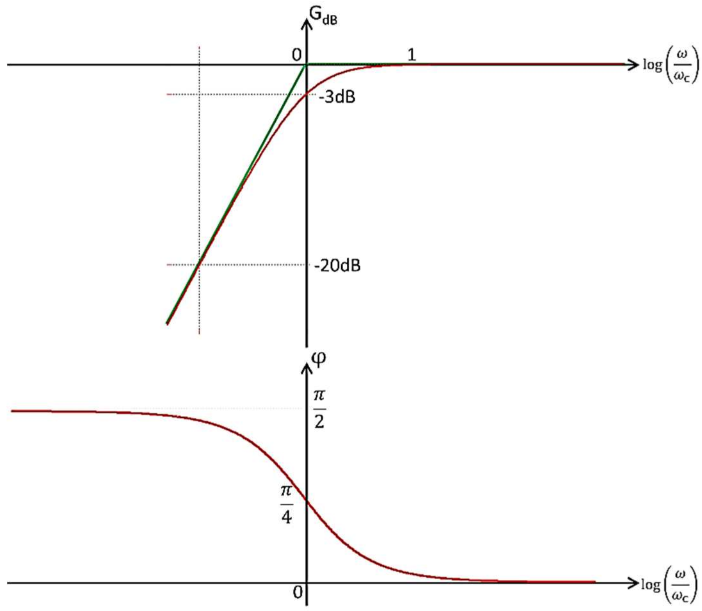
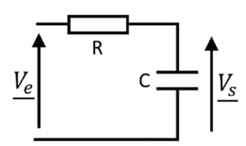
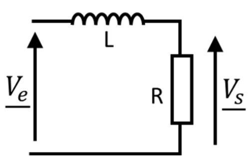
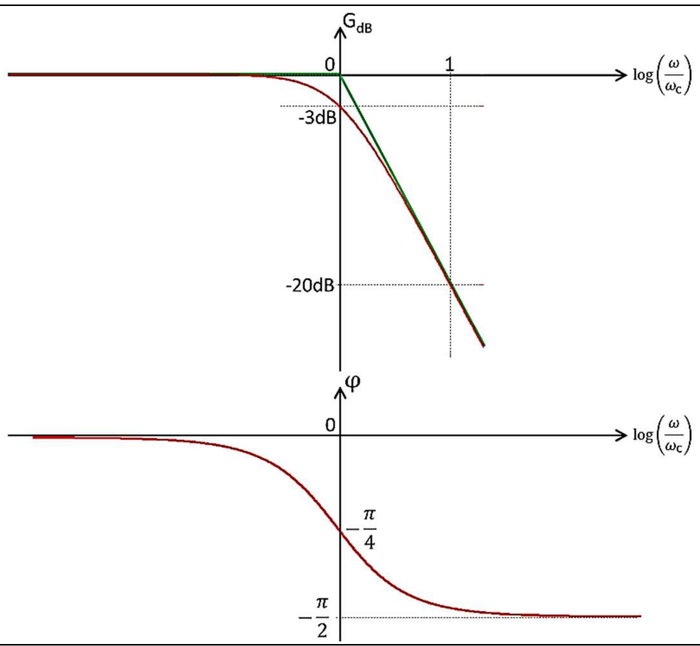
- <u>Savoir repérer un *intégrateur*</u> :

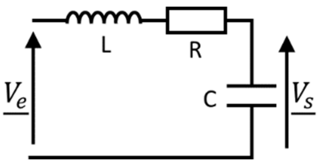
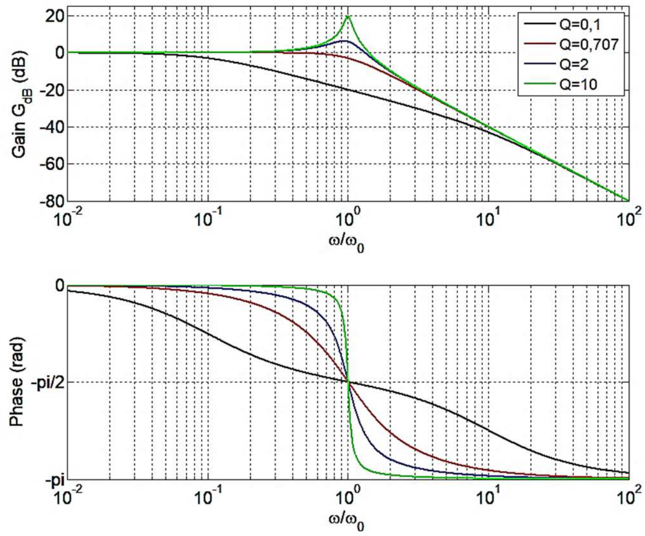
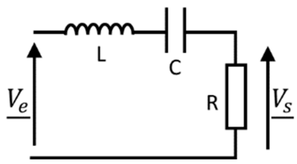
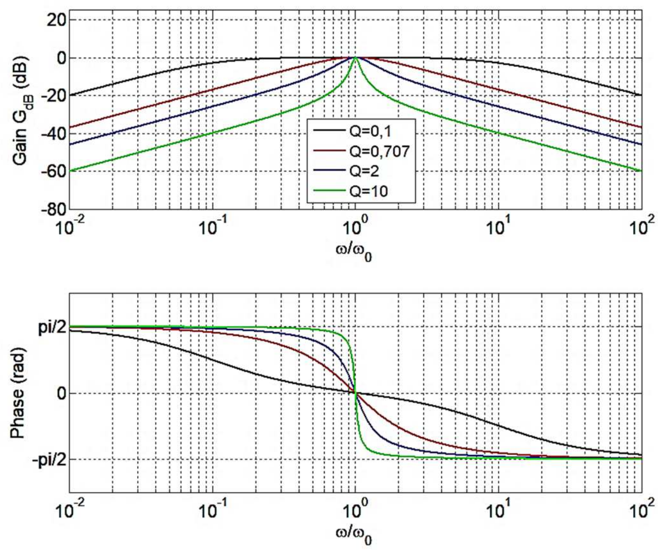
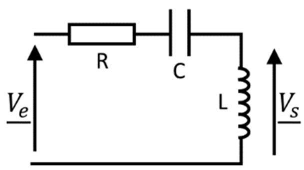
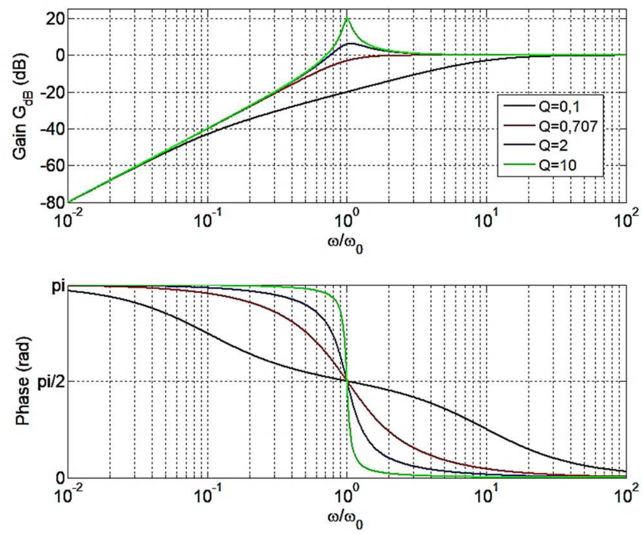
Si un filtre possède dans une certaine gamme fréquence de son diagramme de Bode, une asymptote de ***pente -20 dB/décade***, alors il aura un comportement ***intégrateur sur cette gamme de fréquence*** car alors $H(\omega)$ est proportionnel à $\frac{1}{j\omega}$ (opération d'intégration en complexe).

- <u>Savoir repérer un *moyenneur*</u> :

Un filtre passe-bas de ***fréquence de coupure $f_c$ très petite*** devant la fréquence $f_0$ du signal d'entrée aura un effet ***moyenneur*** *(on coupe toutes les composantes harmoniques, fondamental compris)*.

# 2. Catalogue non-exhaustif

| | | Fonction de transfert canonique | Diagramme de Bode |
|---|---|---|---|
| **1<sup></sup>er ordre** *(à connaitre)* | Passe-haut | $\underline{H}(j\omega) = H_0 . \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ <br> <u>Exemples de circuit</u> : <br>     |   |
| | Passe-bas | $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ <br> <u>Exemples de circuit</u> : <br>     |   |

| | | Fonction de transfert canonique | Diagramme de Bode |
|---|---|---|---|
| **$2^{ème}$ ordre** | Passe-bas | $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{H_0}{1+\dfrac{1}{Q}.j\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ <br> <u>Exemple de circuit</u> : <br>   |   |
| | Passe-bande | $\underline{H}(j\omega) = H_0.\dfrac{\dfrac{1}{Q}.j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+\dfrac{1}{Q}.j\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ <br> Autre forme pratique pour les calculs : <br> $\underline{H}(j\omega) = H_0.\dfrac{1}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ <br> <u>Exemple de circuit</u> : <br>   |   |
| | Passe-haut (pour info) | $\underline{H}(j\omega) = H_0.\dfrac{\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\dfrac{1}{Q}.j\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ <br> <u>Exemple de circuit</u> : <br>   |   |

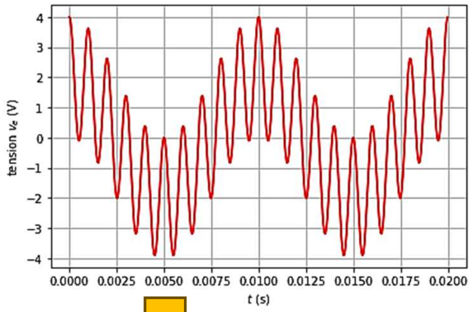
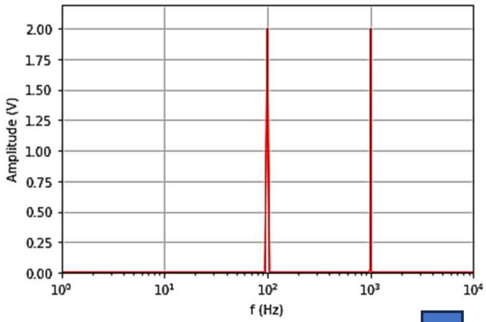
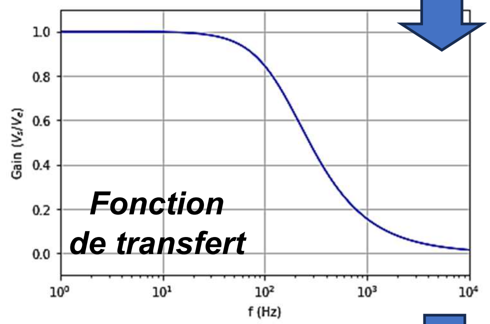
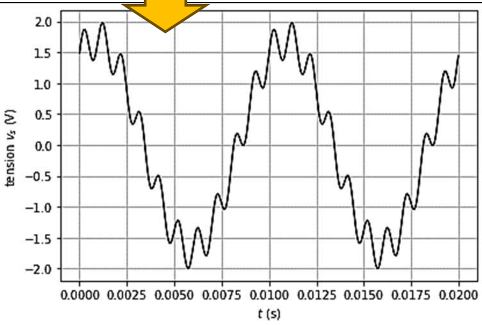
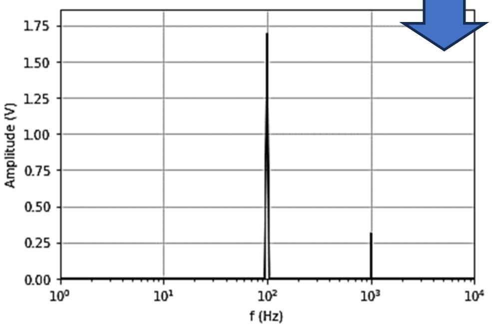
# 3. Analyser et utiliser un filtre

## 3.1. Illustration de l'utilisation du diagramme de Bode

**Méthode : Utiliser la fonction de transfert pour connaitre le spectre du signal de sortie**

Connaissant le spectre du signal d'entrée $v_e(t)$ : $v_e(t) = V_{e_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} V_{e_k}.\cos(k.2\pi f_0.t + \varphi_{e_k})$, on peut obtenir le spectre du signal de sortie $v_s(t)$ en considérant chaque composante indépendamment grâce à la linéarité du filtre: $v_s(t) = V_{s_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} V_{s_k}.\cos(k.2\pi f_0.t + \varphi_{s_k})$

En utilisant les relations suivantes : $\boxed{V_{s_k} = |\underline{H}(k.2\pi f_0)|.V_{e_k}}$ et $\boxed{\varphi_{s_k} = \varphi_{e_k} + \arg(\underline{H}(2\pi.k.f_0))}$

| | **Aspect temporel** | **Aspect fréquentiel (*spectre*)** |
|---|---|---|
| **Signal d'entrée $v_e$** |  |  |
| ***Filtre passe-bas*** *(1er ordre)* | ***Equation différentielle*** $\frac{dv_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}.v_s(t) = \frac{1}{\tau}.v_e(t)$ ***Possibilité de résolution numérique par la méthode d'Euler*** |  |
| **Signal de sortie $v_s$** |  |  |

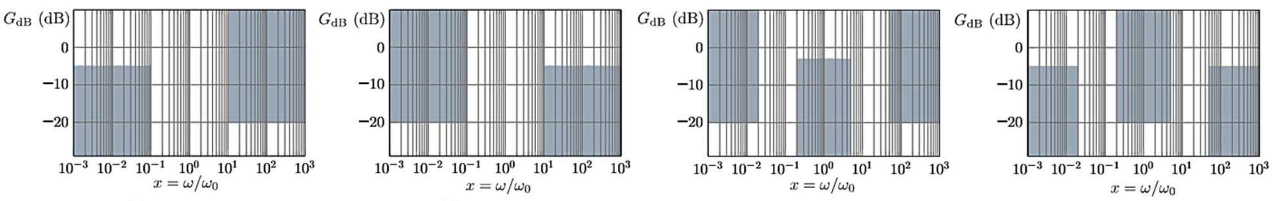
*Pour cet exemple* : On considère un signal d'entrée $v_e(t) = 2.\cos(2\pi.100.t) + 2.\cos(2\pi.1000.t)$.

On souhaite couper la composante à $f_2 = 1000$ Hz afin de ne conserver que la composante à $f_1 = 100$ Hz : on utilise donc un filtre passe-bas. Le filtre choisi est un filtre passe-bas du 1er ordre de fréquence de coupure $f_c = 1{,}6.10^2\text{Hz}$ (circuit RC avec $\tau = RC = 10^{-3}$s).

## 3.2. Choisir un filtre : notion de gabarit

**Définition : Gabarit**

Le ***gabarit*** d'un filtre est le diagramme de Bode du filtre sur lequel apparaissent les zones de pulsations à laisser passer ou à atténuer. La figure ci-dessous donne des exemples de gabarits des filtres classiques. Le tracé du gain doit éviter les zones grisées.

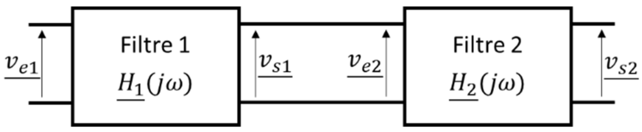


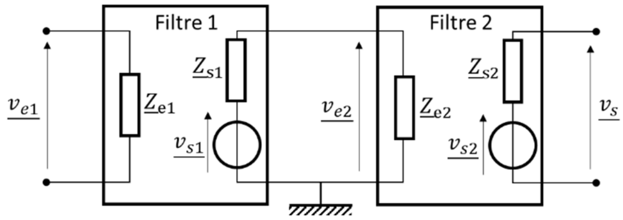

(a) Filtre passe-bas (b) Filtre passe-haut (c) Filtre passe-bande (d) Filtre coupe-bande ou filtre réjecteur

http://www.mmelzani.fr

## 3.3. Mise en cascade de filtres

Pour répondre à un cahier des charges plus complexe, ou très rigoureux, on peut souhaiter réaliser un filtre complexe en associant plusieurs filtres les uns derrière les autres, « en cascade » :




**Méthode : Mise en cascade de filtre**

Il est possible d'obtenir la fonction de transfert de l'ensemble en multipliant les fonctions de transfert de chaque étage à condition que le filtre en aval ne perturbe pas le fonctionnement du filtre en amont. Pour cela il est nécessaire que l'impédance d'entrée $\underline{Z_{e2}}$ du filtre 2 (en aval) soit très grande devant l'impédance de sortie $\underline{Z_{s1}}$ du filtre 1 (en amont) :

$$\boxed{\underline{H_{tot}}(j\omega) = \underline{H_1}(j\omega).\underline{H_2}(j\omega)} \text{ si et seulement si } \boxed{|\underline{Z_{s1}}| \ll |\underline{Z_{e2}}|}$$

## 3.4. Filtre non linéaire : effet des non-linéarités

**Loi : Conséquence d'un filtrage non-linéaire**

Le caractère ***non-linéaire*** d'un filtre se traduit par l'apparition dans le signal de sortie de ***nouvelles fréquences*** qui ne sont pas nécessairement trouvées dans le signal d'entrée.

### AU PROGRAMME

| Notions et contenus | Capacités exigibles | Dans les exercices |
|---|---|---|
| Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode. | ▪ Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.<br>▪ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.<br>▪ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.<br>▪ ***Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.*** | |
| Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2. | ▪ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.<br>▪ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.<br>▪ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.<br>▪ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).<br>▪ ***Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.***<br>▪ ***Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.***<br>▪ *Capacité numérique* : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage. | |