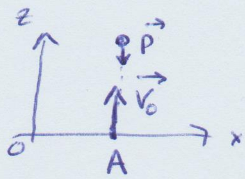
Exercice 3 (bis) : Tir d'un obus vers le zénith.

Q1

* système : {obus}
* référentiel : terrestre, supposé galiléen
* bilan des forces extérieures
  * Poids $\vec{P} = m.\vec{g}$



* 2ème loi de Newton (système fermé)

$$m.\vec{a} = m.\vec{g}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Q2 : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g.t + V_0 \end{pmatrix}$ (utilisation des conditions initiales pour les constantes)

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{OM} = \begin{pmatrix} x_A \\ -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.t + 0 \end{pmatrix}$ (idem)

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{AM} = \begin{pmatrix} x(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + V_0.t \end{pmatrix}}$$

Q3 Obus au sommet (altitude max) $\Rightarrow V_z = 0 \Rightarrow -g.t_{sommet} + V_0 = 0$

$$\hookrightarrow t_{sommet} = \frac{V_0}{g}$$

Donc l'altitude maximale vaut :

$$z(t_{sommet}) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + \frac{V_0^2}{g} \Rightarrow \boxed{z_{sommet} = \frac{V_0^2}{2g}}$$

<u>AN</u> : $z_{sommet} = \underline{510\,m}$

Q4 : Obus au sol : $z = 0$ (comme x ne dépend pas du temps, l'obus retombe en A)

$$z(t_{fin}) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g\,t_{fin}^2 + V_0.t_{fin} = 0 \Rightarrow \boxed{t_{fin} = \frac{2V_0}{g}}$$

<u>AN</u> : $t_{fin} = \underline{20{,}4\,s}$

Q5 : La durée totale du mouvement est très faible devant la période de rotation de la Terre (24h), on peut donc négliger le mouvement de la Terre et supposer le référentiel galiléen (≈ immobile).

Q6 : Expression générale de la trajectoire : $z(x) = -\dfrac{1}{2}.g\dfrac{x^2}{V_0^2.\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha).x$

Portée $\Rightarrow$ l'obus est retombé au sol

$\hookrightarrow z = 0$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{2}g\frac{x_{portée}^2}{V_0^2.\cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha).x_{portée} = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{x_{portée} = \frac{2.\cos^2(\alpha).\tan(\alpha).V_0^2}{g} = \frac{\sin(2\alpha).V_0^2}{g}}$$

$\hookrightarrow$ maximisée si $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

Avec Frottements

Q7 : $\|\vec{F}_{frot.}\| = k \cdot v^2$

$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$; v^2 : $(m \cdot s^{-1})^2$ $\Rightarrow$ k en $\underline{kg \cdot m^{-1}}$

Q8 : Au démarrage : $\|\vec{F}_{frott}\| = 2{,}0 \times 10^{-3} \times 100^2 = 20 N$

$\|\vec{P}\| = 9{,}81 \times 6{,}0 = 59 N$

$\dfrac{\|\vec{F}_{frott}\|}{\|\vec{P}\|} = 0{,}34 > 0{,}01 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Frottements non négligeable}}$

Q9 : $\|\vec{\Pi}\| = \rho_a \cdot V_{obus} \cdot g = \rho_a \cdot \dfrac{m}{\rho_p} \times g$

AN : $\|\vec{\Pi}\| = 1{,}2 \times \dfrac{6}{11{,}3 \times 10^3} \times 9{,}81 = 6{,}3 \times 10^{3} N$

$\dfrac{\|\vec{\Pi}\|}{\|\vec{P}\|} = \dfrac{6{,}3 \times 10^{-3}}{59} = 1 \times 10^{-4} \ll 10^{-2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{poussée d'Archimède négligeable}}$

Q10 : On reprend la situation précédente en ajoutant les frottements :

$\Rightarrow$ Deuxième loi de Newton en projection sur la verticale :

On considère le cas où l'obus descend (v_{limite} pas accessible "à la montée").

$a_z = -g + \dfrac{k}{m} \cdot v_z^2 \underset{v = v_z}{\Rightarrow} \boxed{\dfrac{dv}{dt} = -g + \dfrac{k}{m} \cdot v^2}$

équation non linéaire à cause du carré.

Q11 : v_{limite} obtenue lorsque $\dfrac{dv}{dt} = 0$

$\hookrightarrow \boxed{v_{lim} = \sqrt{\dfrac{g \cdot m}{k}}}$

AN (pas demandé) $v_{lim} = 172 \ m \cdot s^{-1} = 618 \ km \cdot h^{-1}$

Q12 $h_{max} < z_{sommet}$: à cause des frottements l'obus monte moins haut...

h_{max} : avec frottements ; z_{sommet} : calcul sans frottements