Exercice 4 :

Q1 : Le skieur se déplace à vitesse constante V_0

$\hookrightarrow \quad x(t) = V_0 . t + x_0$ or à $t=0$ $x(0) = x_0 = 0$

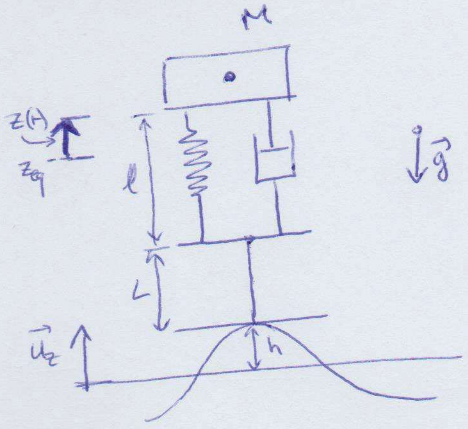
$\hookrightarrow \quad x(t) = V_0 . t$

Le forçage du système oscillant se fait par $h(t) = E_m . \cos\left(\frac{2\pi . x(t)}{\lambda}\right)$

on a donc $h(t) = E_m . \cos\left(\frac{2\pi . V_0}{\lambda} . t\right)$

ω : pulsation de forçage du système.

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi . V_0}{\lambda}}$$



Q2 : · système : {masse M}
· référentiel : terrestre supposé galiléen
· bilan des forces :
· poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$
· force de rappel du ressort : $\vec{F_R} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_z}$
· force exercée par l'amortisseur $\vec{F} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_{O'})\vec{u_z}$

PFD sur Oz : $\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -m.g - k.(\ell - \ell_0) - \alpha\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dz_{O'}(t)}{dt}\right)$

$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -m.g - k(\ell - \ell_0) - \alpha\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dh(t)}{dt}\right)$

or d'après le schéma $\ell = z(t) + z_{eq} - (L + h)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{m.\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -m.g - k\left(z(t) + z_{eq} - (L + h(t)) - \ell_0\right) - \alpha\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dh(t)}{dt}\right)}$

en écriture "compacte" : $\ddot{z}(t) = -mg - k\left(z(t) + z_{eq} - (L + h(t)) - \ell_0\right) - \alpha\left(\dot{z}(t) - \dot{h}(t)\right)$

Q3 : A l'équilibre cette équation devient

$0 = -m.g - k(z_{eq} - L - \ell_0)$ → simplification de l'équation différentielle.

Q4 :

$$m.\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -k\left(z(t) - h(t)\right) - \alpha\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dh(t)}{dt}\right)$$

sous forme canonique :

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}.\frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m}.z(t) = \frac{\alpha}{m}.\frac{dh(t)}{dt} + \frac{k}{m}.h(t)$$

On retrouve la forme de l'énoncé avec $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ et $\boxed{Q = \frac{\sqrt{k.m}}{\alpha}}$

$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow Q = \omega_0 . \frac{m}{\alpha} = \sqrt{\frac{k}{m}} . \frac{m}{\alpha}$

Q5 $\underline{Z}_m = Z_m . e^{j\varphi}$

amplitude complexe pour $\underline{h}(t)$: E_m (réel).

En utilisant l'équation différentielle en représentation complexe :

$$(j\omega)^2 \underline{Z}_m + \frac{\omega_0}{Q} . j\omega . \underline{Z}_m + \omega_0^2 . \underline{Z}_m = j\omega \frac{\omega_0}{Q} . E_m + \omega_0^2 . E_m$$

$$\underline{Z}_m = \frac{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q} j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} . E_m.$$

$$\boxed{Z_m = |\underline{Z}_m| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} . E_m}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Q6

* On rappelle : $\omega = \frac{2\pi . V_0}{\lambda}$ → la pulsation ω est directement proportionnelle à la vitesse V_0 du skieur.

* Si l'amplitude Z_m devient trop importante, le skieur va être très chahuté ; la descente est alors très compliquée.
  ↳ Il faut donc éviter la résonance en amplitude :

Solution 1 : changement de vitesse
- on ralentit pour avoir $\omega \to 0$ ($x \to 0$ sur la courbe)
- on va très vite pour avoir $\omega \gg \omega_0$ et donc $x \gg 1$.

solution 2 : modifier le facteur de qualité $Q = \sqrt{\frac{k.m}{\alpha}}$

↳ amortir d'avance au prix d'un effort musculaire des jambes.