Approche énergétique de la mécanique

Plan du cours

1. Si ça bouge, c'est qu'il y a de l'énergie 1
 1.1. Généralités sur l'énergie 1
 1.2. Travail d'une force 1
 1.3. Energie cinétique 3
 1.4. Théorème de l'énergie cinétique 3
 1.5. Puissance 4
2. Forces conservatives & énergie potentielle 4
3. Energie mécanique 5
4. Mouvement conservatif à 1 degré de liberté 5
 4.1. Cadre de l'étude 5
 4.2. Représentation graphique 5
 4.3. « Une force conservative dérive d'une énergie potentielle » 6
 4.4. Conditions d'équilibre et de stabilité 7
 4.5. Principe de l'approximation harmonique 7

1. Si ça bouge, c'est qu'il y a de l'énergie

1.1. Généralités sur l'énergie

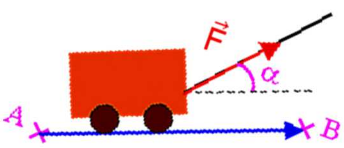
Définition : Energie

En physique, l'***énergie*** est une grandeur qui mesure la capacité d'un système à modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, un rayonnement électromagnétique ou de la chaleur. L'énergie s'exprime en joule (J).

Définition bis : Energie

L'énergie est la grandeur physique qui se conserve lors de toute transformation d'un système isolé (pas d'échanges avec l'extérieur).
La mathématicienne ***Emmy Noether*** a montré au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle que la notion d'énergie est une conséquence directe du fait que ***les lois de la physique restent les mêmes au cours du temps***.

1.2. Travail d'une force



Définition : Travail d'une force constante (mouvement rectiligne)

Quand une force exerce une influence sur le mouvement d'un système, on dit qu'elle travaille. Cette force modifie en effet l'énergie associée au mouvement du système.

Dans le cas d'une force constante $\vec{F}$, le ***travail*** W de cette force lorsque le système se déplace en mouvement rectiligne d'un point A à un point B vaut :

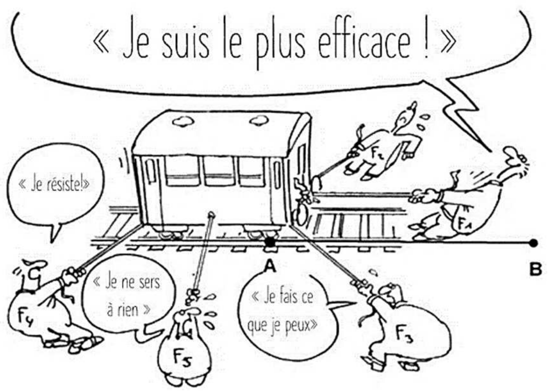
$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}} = F.AB.\cos(\alpha)$$

Le travail correspond à l'***énergie apportée au système*** et s'exprime donc en Joule.

⚠ La notion de trajet dépendant du référentiel d'étude, le travail dépend lui aussi du référentiel choisi.

Méthode : Distinguer force motrice et force résistante

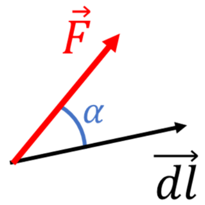
- Si la force $\vec{F}$ fait avancer le système ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$), on dit que la force est ***motrice***. Le travail de la force est alors positif ($W_{AB}(\vec{F}) > 0$) et contribue donc à faire augmenter l'énergie du système.
- Si la force $\vec{F}$ s'oppose à l'avancée du système ($\alpha < -\pi/2$ ou $\alpha > \pi/2$), on dit que la force est ***résistante***. Le travail de la force est négatif ($W_{AB}(\vec{F}) < 0$) et contribue donc à faire diminuer l'énergie du système.
- Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement du système ($\alpha = -\pi/2$ ou $\alpha = \pi/2$), elle ne travaille pas ($W_{AB}(\vec{F}) = 0$).



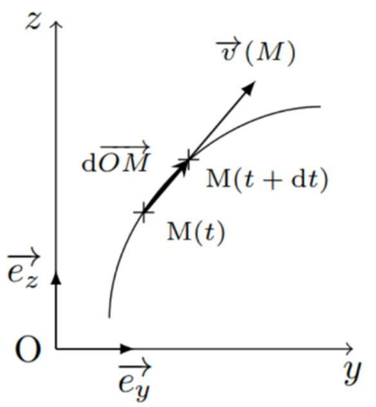
Définition : Travail élémentaire d'une force

Pour une trajectoire quelconque et une force qui peut évoluer au cours de la trajectoire, on décompose le parcours comme une somme infinitésimale de ***déplacement élémentaire*** $\overrightarrow{dl}$ (assimilé à un déplacement rectiligne).
Pour chacun de ces déplacements élémentaires, on associe un ***travail élémentaire*** δW de la force $\vec{F}$ qui peut alors être supposée constante sur le trajet $\overrightarrow{dl}$. Le travail élémentaire vaut donc :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



<u>Rmq</u> : On utilise un δ plutôt qu'un d pour le travail élémentaire car le travail ne peut pas être défini en un point donné mais seulement sur un déplacement : ce n'est pas une différentielle.



Méthode : Déplacement élémentaire (rappel)

Le déplacement élémentaire est noté $\overrightarrow{dl}$ ou $d\overrightarrow{OM}$ et correspond à la variation du vecteur $\overrightarrow{OM}$ durant un temps élémentaire dt :

$$\overrightarrow{dl} = d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t+dt)M(t)}$$

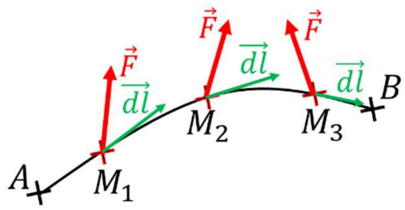
L'expression du déplacement élémentaire peut se trouver facilement à partir des expressions de la vitesse $\vec{v}$:

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = \vec{v}.dt}$$

- Dans le repère cartésien : $\overrightarrow{dl} = dx.\overrightarrow{u_x} + dy.\overrightarrow{u_y} + dz.\overrightarrow{u_z}$
- Dans le repère cylindrique : $\overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{u_z}$

Définition : Travail d'une force le long d'une trajectoire

On considère un point matériel M soumis à la force $\vec{F}$ se déplaçant d'un point A jusqu'à un point B.



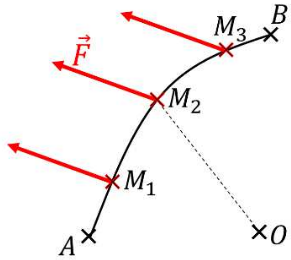
Le travail de la force $\vec{F}$ le long du chemin $\widehat{AB}$ est la somme de tous les travaux élémentaires le long du chemin :

$$\boxed{W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

⚠ Le travail ***dépend du chemin suivi*** entre A et B. Il ne dépend pas que des points de départ et d'arrivée, comme lorsqu'on intègre une fonction. Savoir exprimer le travail élémentaire sur le chemin suivi est donc important.

Illustration : cas d'une force constante sur tout le déplacement

$$W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$$
$$W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}.\int_{\widehat{AB}} d\overrightarrow{OM}$$
$$W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$
$$W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$



Dans le cas d'une ***force constante*** le travail de la force ne dépend pas du chemin suivi !

1.3. Energie cinétique

Démonstration : Expression de l'énergie cinétique

D'après la définition du travail élémentaire, on peut dire que la variation élémentaire de l'énergie cinétique E_c associée au système vaut :

$$dE_c = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

Or d'après le principe fondamental de la dynamique (si référentiel galiléen) : $m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

En projetant sur le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$: $m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dl} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}.\overrightarrow{dl}$

Et en utilisant la relation $\vec{v} = \overrightarrow{dl}/dt$, on obtient : $m.\vec{v}.d\vec{v} = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$

On a donc :

$$dE_c = m.\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}.m.\vec{v}^2\right)$$

Définition : Energie cinétique

L'***énergie cinétique*** d'un point matériel M de masse m en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ vaut :

$$\boxed{E_c(M) = \frac{1}{2}.m.v^2}$$

Elle s'exprime en Joule.
Cette énergie est associée à la quantité de mouvement $\vec{p} = m.\vec{v}$ du point matériel M. On a donc également :

$$E_c(M) = \frac{p^2}{2m}$$

1.4. Théorème de l'énergie cinétique

En intégrant la variation élémentaire d'énergie cinétique dE_c entre le point de départ A et le point d'arrivée B, $\int_{\widehat{AB}} dE_c = \sum \int_{\widehat{AB}} \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$, on obtient le théorème de l'énergie cinétique.

Loi : Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen sur un trajet $\widehat{AB}$ est égale à la somme des travaux des actions extérieures sur ce même trajet :

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{\widehat{AB}}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

1.5. Puissance

Définition : Puissance d'une force

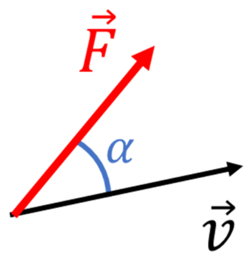
On considère un point matériel M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$. On définit la puissance $\mathcal{P}$ reçue par M soumis à la force $\vec{F}$ (ou plus simplement « la puissance de la force $\vec{F}$ ») comme le produit scalaire de la force et de la vitesse :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}} = \|\vec{F}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\alpha)$$

La puissance s'exprime en watt (W).

L'énergie reçue par le système durant une durée dt vaut donc $\mathcal{P}(\vec{F}).dt = \vec{F}.\vec{v}.dt = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ et correspond donc au travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$:

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}).dt}$$



Loi : Théorème de la puissance cinétique pour un point matériel

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique E_c d'un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen est égale à la somme des puissances des forces extérieures agissant sur M :

$$\boxed{\frac{dE_c(M)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{ext}})}$$

Ce théorème constitue ***la forme instantanée du théorème de l'énergie cinétique***.

2. Forces conservatives & énergie potentielle

Définition : Force conservative

Une force est dite ***conservative*** lorsqu'elle dépend *uniquement* de la position du système (et pas d'autres paramètres tels que le sens de déplacement ou les positions antérieurs du système).

➔ Le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi : il dépend seulement du point de départ et du point d'arrivée.

➔ Pour une trajectoire fermée (retour à la position initiale), la variation d'énergie cinétique est nulle : le travail résistant dans un sens est compensé par un travail moteur de valeur opposée dans l'autre sens.

➔ L'énergie cinétique transférée via une force conservative n'est pas perdue mais seulement stockée : elle peut être intégralement récupérée.

Exemple de force conservative : poids, force d'attraction gravitationnelle, force de rappel d'un ressort, force électrostatique dans un champ électrique uniforme, …

Définition : Energie potentielle

La variation d'énergie cinétique due au travail d'une force conservative n'est pas vraiment perdue mais stockée.

Cette énergie stockée est appelée ***énergie potentielle***. La variation d'énergie potentielle est égale à l'inverse du travail de la force conservative :

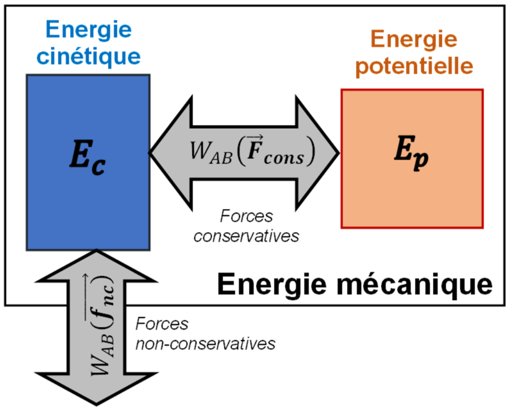
$$\boxed{dE_p = -dW(\vec{F}_{cons})} \text{ ou } \boxed{E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}(\vec{F}_{cons})}$$

Puisque seule la variation de E_p a du sens, cette grandeur est ***définie à une constante additive près***. Tout comme la force conservative associée, l'énergie potentielle ne dépend que de la position du système.

Expression à connaitre :

Force	Expression de la force	Energie potentielle E_p
poids	$\vec{P} = m.\vec{g}$	$E_{pp} = m.g.z + c^{ste}$
Force de rappel d'un ressort	$\overrightarrow{F_R} = -k.x.\overrightarrow{u_x}$	$E_{pe} = 1/2.k.x^2$
Force d'attraction gravitationnelle	$\overrightarrow{F_G} = -G.\frac{m_{Astre}.m_{syst}}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$	$E_{pg} = -G.\frac{m_{Astre}.m_{syst}}{r} + c^{ste}$

3. Energie mécanique



Définition : Energie mécanique

L'***énergie mécanique*** E_m d'un point matériel M est définie comme la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p :

$$E_m(M) = E_c(M) + E_p(M)$$

Elle s'exprime en joule (J).

Loi : Théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel M en mouvement dans un référentiel galiléen sur un trajet $\widehat{AB}$ est égale à la somme des travaux des ***forces extérieures non conservatives*** sur ce même trajet :

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{\widehat{AB}}\left(\overrightarrow{f_{ext,nc}}\right)}$$

Remarque : - Un exemple très important de force non conservative : ***les frottements*** !

Méthode : Conséquences des forces non-conservatives

- <u>Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives</u> : $\Delta E_m = 0$ ➔ $E_m = \text{c}^{\text{ste}}$
  mais possibilité de transferts d'énergie sans pertes entre énergie cinétique et énergie potentielle. Dans ce cas on dit que le ***mouvement est conservatif***.
- <u>S'il y a au moins une force non-conservative</u> alors $\mathrm{E_m}$ n'est plus une constante.
  S'il s'agit de forces de frottement, l'énergie mécanique $\mathrm{E_m}$ diminue : de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

4. Mouvement conservatif à 1 degré de liberté

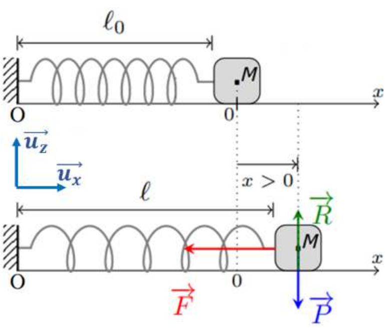
4.1. Cadre de l'étude

Définition : Système à 1 degré de liberté

Un système à ***1 degré de liberté*** est un système dont le mouvement du point matériel peut être caractérisé par une seule coordonnée (x, r ou θ par exemple).

4.2. Représentation graphique

4.2.1. Puit de potentiel harmonique



Prenons l'exemple du système {masse+ressort} horizontal (cas de l'oscillateur harmonique).

En imposant l'énergie potentielle de pesanteur nulle à l'altitude du mouvement, l'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2}.k.x^2$$

où k est la constante de raideur et x est l'allongement du ressort.

Les frottements étant négligés, le travail des forces non-conservatives est nulle. D'après le théorème de l'énergie mécanique on a :

$$E_m = E_c + E_p = E = \text{constante}$$

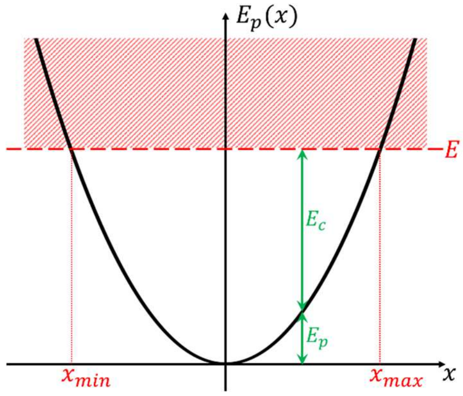
La valeur de l'énergie totale E est imposée par le conditions initiales sur la position et la vitesse de la masse.

Pour un tel oscillateur harmonique, la courbe $E_p(x)$ de l'énergie potentielle en fonction de la position x est une ***parabole***.

La valeur de l'énergie mécanique E, constante, impose un maximum pour l'énergie potentielle : une partie de la courbe est inaccessible. Le mouvement est donc borné entre deux positions extrêmes où la vitesse s'annule ($E_c = 0$) :

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

On parle alors de « ***puits de potentiel*** ».



4.2.2. Généralisation

Définitions : Un peu de jargon

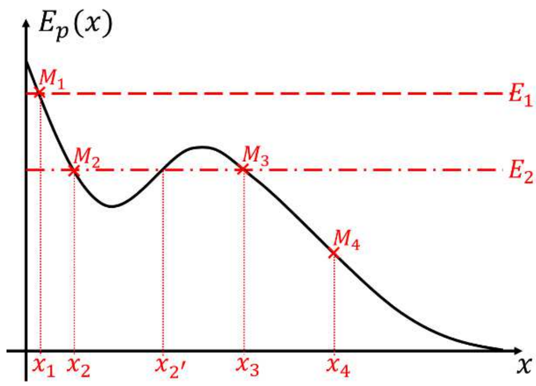
- ***Puits de potentiel*** : minimum local de l'énergie potentielle sur la courbe $E_p(x)$.
- ***Barrière de potentiel*** : maximum local de l'énergie potentielle sur la courbe $E_p(x)$.
- ***Etat lié*** : le système oscille autour d'un minimum d'énergie sans pouvoir s'en éloigner.
- ***Etat de diffusion*** : le système est capable de transformer l'intégralité de son énergie potentielle en énergie cinétique en s'éloignant à l'infini.

Méthode : Analyser la courbe $E_p(x)$ pour un mouvement conservatif

Cas n°1 : Le système démarre en M_1 sans vitesse initiale (donc $E_m = E_1$)
Le système possède assez d'énergie pour passer la barrière de potentiel entre x_2' et x_3 : c'est un ***état de diffusion***.

Cas n°2 : Le système démarre en M_2 sans vitesse initiale (donc $E_m = E_2$)
Le système reste dans le puit de potentiel et oscille entre x_2 et x_2' : c'est un ***état lié***.

Cas n°3 : Le système démarre en M_3 sans vitesse initiale (donc $E_m = E_2$)
Le système tend à minimiser son énergie potentielle et évolue vers $x \to \infty$: c'est un ***état de diffusion***.



4.3. « Une force conservative dérive d'une énergie potentielle »

4.3.1. Cas à un degré de liberté

Loi : Lien entre force conservative et énergie potentielle

Soit une force conservative de la forme : $\vec{F}_{cons}(x) = F(x).\vec{u}_x$

On a alors $dE_p = -\delta W(\vec{F}_{cons}) = -F(x).\vec{u}_x.dx.\vec{u}_x$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$

On dit que la force $\vec{F}_{cons}$ ***dérive d'une énergie potentielle*** $E_p(x)$.

C'est vrai pour toutes les forces conservatives.

Méthode : Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$

Sur la courbe $E_p(x)$, la force exercée sur le système s'obtient par lecture graphique : la force conservative « pousse vers le bas » le système avec une force d'autant plus grande que la pente est importante.

4.3.2. Généralisation

Définition : L'opérateur gradient

On admettra que pour une force $\vec{F}$ conservative dont l'énergie potentielle associée est donnée par $E_p(x,y,z)$, on peut écrire la relation :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}.\vec{u}_z\right)$$

et on définira ***l'opérateur « gradient »*** tel que :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p(x,y,z)\right)}$$

Remarques :

- La « dérivée partielle » $\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}$ correspond à la dérivation de la fonction $E_p(x,y,z)$ par rapport à x, en considérant y et z constants par ailleurs.
- L'opérateur gradient s'applique à une fonction scalaire, et renvoie un vecteur.
- Cette expression se généralise à tout système de coordonnées. On fournira alors les expressions de l'opérateur gradient pour le système concerné.

4.4. Conditions d'équilibre et de stabilité

Définition : Positions d'équilibre

Les positions d'équilibre d'un système sont l'ensemble des positions $x_{éq}$ correspondant à un extremum (minimum ou maximum) d'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_{éq}) = 0$$

Définition : Stabilité de l'équilibre

Il existe deux types de positions d'équilibre :

- Les ***positions d'équilibre stables***, telles que si l'on écarte le mobile d'une telle position les forces extérieures tendront à l'y ramener. C'est le cas pour les ***minimums locaux*** de la courbe $E_p(x)$.
- Les ***positions d'équilibre instables***, telles que si l'on écarte le mobile d'une telle position les forces extérieures tendront à l'en écarter davantage. C'est le cas pour les ***maximums locaux*** de la courbe $E_p(x)$.

Remarque : on distingue les minima des maxima grâce à la ***dérivée seconde*** $\frac{d^2E_p}{dx^2}$ qui est positive pour un minimum et négative pour un maximum.

4.5. Principe de l'approximation harmonique

Méthode : Approximation harmonique

Pour tout système possédant une position d'équilibre stable, correspondant à un ***puits de potentiel***, il sera possible d'approximer localement la fonction énergie potentielle E_p aux alentours proches de l'équilibre par une ***équation parabolique***. Dans le cadre de ***petites oscillations autour de cette position d'équilibre*** et en l'absence de forces non-conservatives, le système se comportera alors comme un ***oscillateur harmonique***.

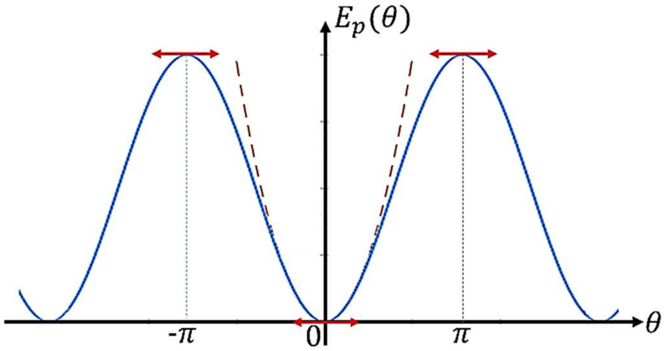


Illustration de l'approximation harmonique dans le cas du pendule

Point maths : Développement limité

Soit f une fonction (suffisamment dérivable) et x_0 un point.
On peut approcher les valeurs de f autour du point x_0 à l'aide d'un développement limité :

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0).f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^3}{3!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 3}} + \underbrace{o((x - x_0)^3)}_{\substack{\text{termes négligeables} \\ \text{devant les autres}}}$$

Nous l'avons écrit à l'ordre 3 ci-dessus, mais il peut être mené à n'importe quel ordre.
L'écriture de chaque terme permet d'être de plus en plus précis dans la description de f autour de x_0.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Puissance, travail et énergie cinétique		
Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	▪ Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.	
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	▪ Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.	
Champ de force conservative et énergie potentielle		
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	▪ Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. ▪ Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. ▪ Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.	
Énergie mécanique		
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	▪ Distinguer force conservative et force non conservative. ▪ Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. ▪ Utiliser les conditions initiales.	
Mouvement conservatif à une dimension		
Mouvement conservatif à une dimension.	▪ Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. ▪ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.	
Positions d'équilibre. Stabilité.	▪ Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.	
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	▪ Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. ▪ *Capacité numérique* : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre nonlinéaire et faire apparaître l'effet des termes nonlinéaires.	
Tension d'un fil. Pendule simple.	▪ Établir l'équation du mouvement du pendule simple. ▪ Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire	