Approche énergétique de la mécanique
Travaux Dirigés

Méthodologie : Comment travailler les exercices ?

Avant la séance de TD :
- Sur une feuille de brouillon, avec un crayon à la main et le chapitre ouvert sous les yeux.
- Essayer des « trucs » même si cela n'aboutit pas.
- Faire des schémas complets et suffisamment grands.
- Ne rien écrire sur l'énoncé de TD afin de pouvoir refaire les exercices après la correction en classe.
- Réfléchir environ 10 à 15 min sur chaque exercice demandé. Si vous bloquez complètement sur une question/un exercice, passez à la suite au bout de 10 min, et me poser des questions.

Après la séance de TD :
- Refaire les exercices corrigés ensemble, sans regarder le corrigé dans un premier temps.
- Une fois l'exercice terminé ou si vous êtes totalement bloqué, reprendre avec le corrigé.

En autonomie

Cahier d'entrainement : fiche 12

Savoir-faire

Savoir-faire 1 – Calculer le travail et la puissance d'une force

Un cycliste de masse m = 80 kg (vélo et équipement inclus) effectue l'ascension du Ballon d'Alsace (dénivelé de 700 m).

Q1. Calculer le travail W du poids lors de cette ascension. Cette force est-elle motrice ou résistante ?

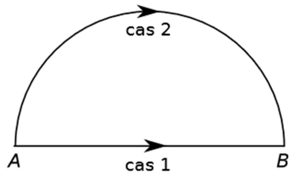
Q2. Le cycliste roule en ligne droite à 15 km/h sur une pente montante de 10% (donc avec un angle par rapport à l'horizontale de $\alpha = \arctan\left(\frac{10}{100}\right)$. Que vaut la puissance du poids ? Commenter son signe. Comparer avec la puissance dégagée par le corps humain au repos qui est d'environ 100 W.

Savoir-faire 2 – Distinguer force conservative et force non-conservative

Une voiture de masse m = 1200 kg va d'un point A à un point B distants de d = 10 km, en roulant avec une vitesse constante. On modélise les frottements dus à l'air par une force $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$ (avec λ constant).

Q1. Pour chacune des trajectoires ci-contre, donner l'expression du travail de la force de frottement lors de ce déplacement.

Q2. Conclure sur la nature conservative ou non conservative de cette force.

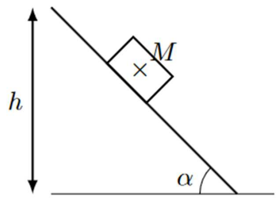


Savoir-faire 3 - Savoir utiliser le théorème de l'énergie cinétique *(et choisir la bonne forme)*

Un palet (m = 1,0 kg) est lâché sans vitesse initiale sur un plan incliné d'une hauteur h = 5 m et faisant un angle α = 45° avec l'horizontale. On néglige tout frottement entre le palet et le plan.

Q1. Quelle est la vitesse du palet au bas du toboggan ?

Q2. Déterminer l'équation du mouvement.



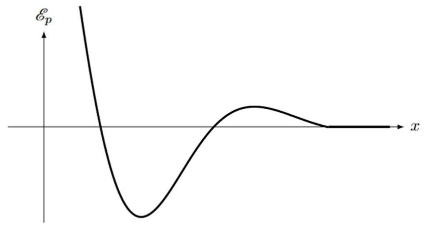
Savoir-faire 4 – Savoir exploiter un graphe d'énergie potentielle pour un mouvement à 1 degré de liberté

On considère un mouvement à un degré de liberté, noté x.

Q1. Déterminer les positions d'équilibre et donner leur stabilité.

Q2. Sous quelles conditions le point M sera-t-il dans un état lié ?

Q3. Donner la direction de la résultante des forces et indiquer qualitativement les zones de forte et de faible intensité de la force.



Savoir-faire 5 – Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.

L'attraction exercée par la Terre sur ses satellites est associée à une énergie potentielle :

$E_p(r,\theta,\phi) = -G.\frac{m.M_T}{r} + C$, avec C une constante, m la masse du satellite et M_T la masse de la Terre.

Q1. En déduire l'expression de la force dans le référentiel géocentrique associé à la base sphérique d'origine O.

Donnée : expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\big(f(r,\theta,\phi)\big) = \frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial r}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}.\vec{u}_\theta + \frac{1}{r.\sin(\theta)}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}.\vec{u}_\phi$$

Exercices incontournables

Exercice 1 : Bande rugueuse (★☆☆)

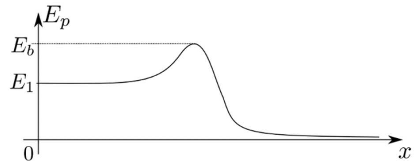
Un palet de masse m se déplace sans frottements sur une piste verglacée horizontale. Il aborde alors une bande de largeur L où il existe une force de frottement opposée au mouvement et de norme f (f est une constante positive). Sa vitesse au début de la bande rugueuse est notée v_A.

Q1. A quelle condition sur v_A le palet pourra-t-il traverser la bande ?

Q2. Répondre à la même question en considérant que le palet descend une piste inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

Exercice 2 : Franchissement d'une barrière de potentiel (★☆☆)

On considère l'énergie potentielle ci-contre, qui peut correspondre à une bille glissant sans frottements sur un sol dont la topographie est celle du graphique : altitude h_1 en $x = 0$, franchissement d'un col d'altitude h_b, puis altitude nulle lorsque $x \to +\infty$. La bille est lancée en $x = 0$ avec une vitesse v_0 en direction des x croissants.



Q1. Justifier que l'énergie mécanique de la bille reste constante au cours du temps.

Q2. Montrer que la bille atteint tout juste le haut du col pour une valeur particulière de sa vitesse initiale v_0, que l'on exprimera en fonction de m, E_1 et E_b.

Q3. Que se passe-t-il si v_0 est inférieure à cette valeur limite ? Et supérieure ?

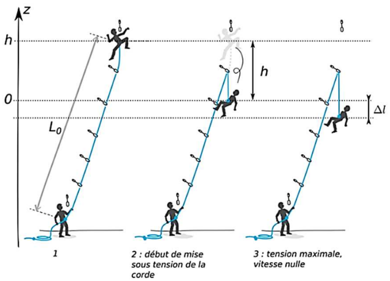
Q4. Exprimer enfin v_0 en fonction de m, g, h_1 et h_b.

Exercice 3 : Chute sur corde en escalade (★★☆)

On étudie un grimpeur qui effectue une chute.

Une corde d'escalade de longueur L_0 peut en première approximation être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.

Le grimpeur est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. Puis la corde passe sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse du grimpeur devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.



On prendra $g \approx 10$ m.s^{-2}, une corde avec α = 5,0.10^4 N et un grimpeur de masse 100 kg.

Q1. À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse atteinte par le grimpeur lorsque la corde commence à se tendre. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute h = 5 m.

Q2. Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde. On supposera que $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.

Q3. Donner enfin l'expression de la force maximale F_{max} qui s'exerce sur le grimpeur. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

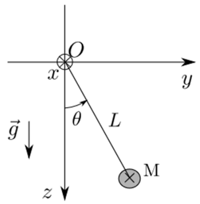
Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants.

Q4. Que vaut F_{max} pour une chute de h = 4 m sur une corde de longueur L_0 = 4 m ? Conclusion ?

Q5. Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Exercice 4 : Application du TEM sur le cas du pendule simple (★★☆)

On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable, on note L sa longueur. On néglige tout frottement. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = g.\vec{u}_z$ avec z axe vers le bas et $g \approx 10$ m.s^{-2} constante.



Q1. Donner l'expression de l'énergie cinétique de la masse m en fonction des coordonnées polaires du point M.

Q2. Faire de même pour l'énergie potentielle de pesanteur du point M.

Q3. Que peut-on dire du travail de la force de tension du fil ?

Q4. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une quantité comprenant $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ qui reste constante tout au long du mouvement.

Q5. En déduire l'équation du mouvement, qui porte sur $\ddot{\theta}$ et θ.

Exercices d'entrainement

Exercice 5 – Distance de freinage (★☆☆)

Une voiture de masse m = 1500 kg roule à la vitesse de 50 km.h^{-1} sur une route horizontale. L'automobiliste freine et s'arrête sur une distance de d = 15 m. On supposera des frottements solides entre la voiture et la route, de facteur de frottement constant.

Q1. Déterminer le travail de la force de frottement et en déduire le facteur de frottement.

Q2. En supposant le facteur de frottement inchangé, quelle distance faut-il pour s'arrêter avec une vitesse initiale de 90 km.h^{-1} ?

Exercice 6 : Le Marsupilami (★☆☆)

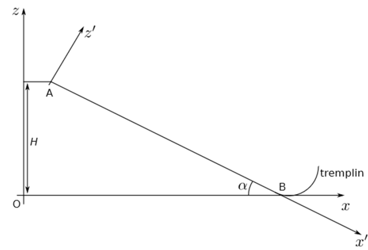
Le Marsupilami est un animal de BD créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.

On note ℓ_0 = 2,0 m la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est ℓ_m = 50 cm. La masse m de l'animal est 50 kg et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0.

Q1. Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est h = 10 m ?

Exercice 7 : Le skieur (★★☆)

On considère un skieur qui se lance, sans vitesse initiale au point A, dans une piste d'inclinaison moyenne α = 30° pour un dénivelé total de H = 10 m. La masse du skieur et de ses équipements est de 100 kg.



On modélise les frottements entre la neige et les skis par la loi de Coulomb pour les frottements : la résultante des actions de la neige sur le skieur s'écrit $\vec{N} + \vec{T}$, avec $\vec{N}$ la composante normale à la piste et $\vec{T}$ la composante tangentielle (correspondant à des frottements), avec $\|\vec{T}\| = f.\|\vec{N}\|$ et f = 0,15 le coefficient de frottement ski-neige.

Q1. Le mouvement est-il conservatif ?

Q2. Montrer que $\vec{T} = -f.m.g.\cos(\alpha)$.

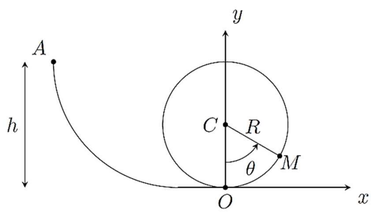
Q3. En appliquant un théorème énergétique, donner l'expression de l'énergie cinétique du skieur lorsqu'il arrive au bas de la pente (point B). En déduire la valeur de sa vitesse en B.

Le skieur arrive ensuite sur un tremplin et décolle. On néglige les frottements de l'air.

Q4. Quelle est l'altitude maximale qu'il va pouvoir atteindre ? Dans le cas de l'altitude maximale, tracer sa trajectoire.

Résolution de problème : LE Looping (★★★)

Une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur h. Elle passe ensuite dans un looping de rayon R. On négligera les frottements. On souhaite que la bille fasse le tour du looping sans jamais décrocher, c'est-à-dire sans que le contact entre la bille et son support ne se perde.



Q1. Établir que la condition à vérifier afin que la bille ne décroche pas sur un tour complet est : $h \geq \frac{5}{2}.R$