Approche énergétique de la mécanique

Chapitre M3

Une grandeur universelle

Définition : Energie

En physique, l'***énergie*** est une grandeur qui mesure la capacité d'un système à modifier un état, à produire un travail entraînant un mouvement, un rayonnement électromagnétique ou de la chaleur.

L’énergie s’exprime en Joule.

On s’intéresse plus aux transferts d’énergie qu’à la valeur de l’énergie dans un système.

Spécifiquement en mécanique

A quoi sert l'approche énergétique en mécanique?

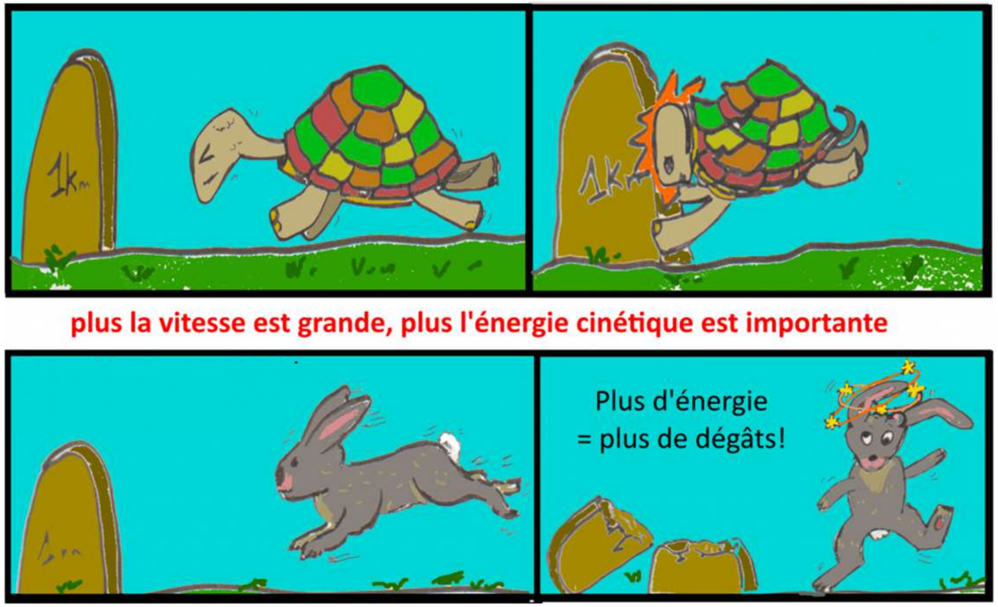
- A prendre parfois des raccourcis pour arriver au résultat !
- Avoir la satisfaction d'utiliser une approche qui s'applique à de nombreuses branches de la physique et de la chimie.

L'approche énergétique est une autre façon d'aborder la mécanique : les résultats obtenus sont rigoureusement identiques à ceux des chapitres précédents!

Spécifiquement en mécanique

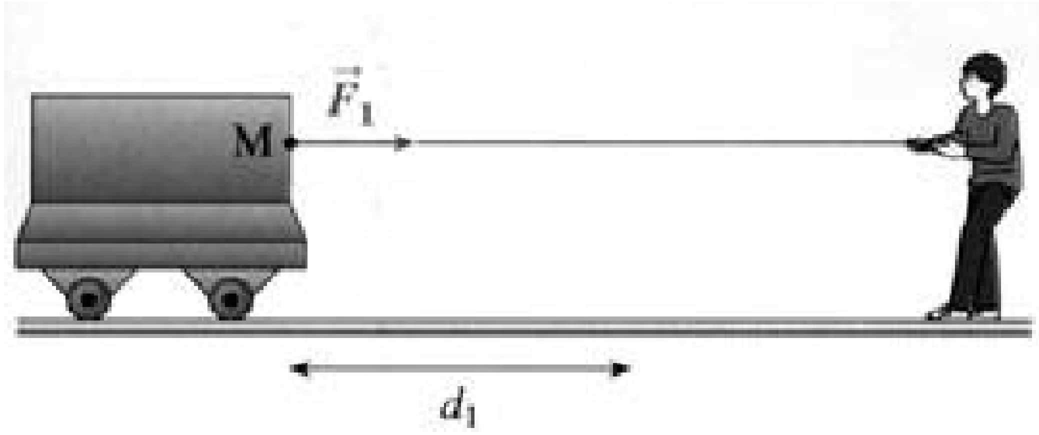
Comment savoir si un système contient de l'énergie?

S'il bouge, pas de doute, il y a de l'énergie!



<u>Energie cinétique</u>

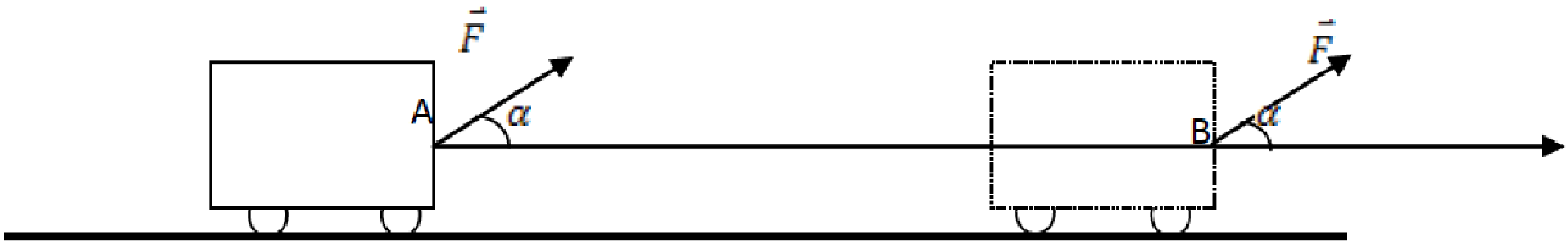
Comment faire rentrer ou sortir de l'énergie ?



Il faut travailler!

- Plus on applique une force élevée, plus le travail fourni est grand.
- Plus la distance sur laquelle on applique une force est grande, plus le travail fourni est grand.

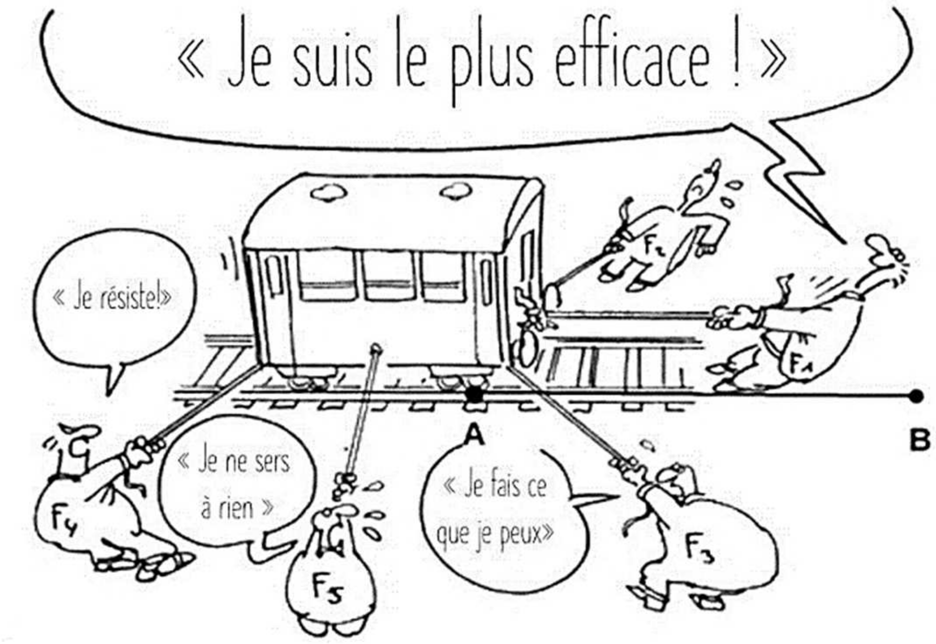
Comment faire rentrer ou sortir de l'énergie ?



Dans le cas d'une force constante $\vec{F}$, le ***travail*** W de cette force lorsque le système se déplace en mouvement rectiligne d'un point A à un point B vaut :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}} = F.AB.\cos(\alpha)$$

Comment faire rentrer ou sortir de l'énergie ?

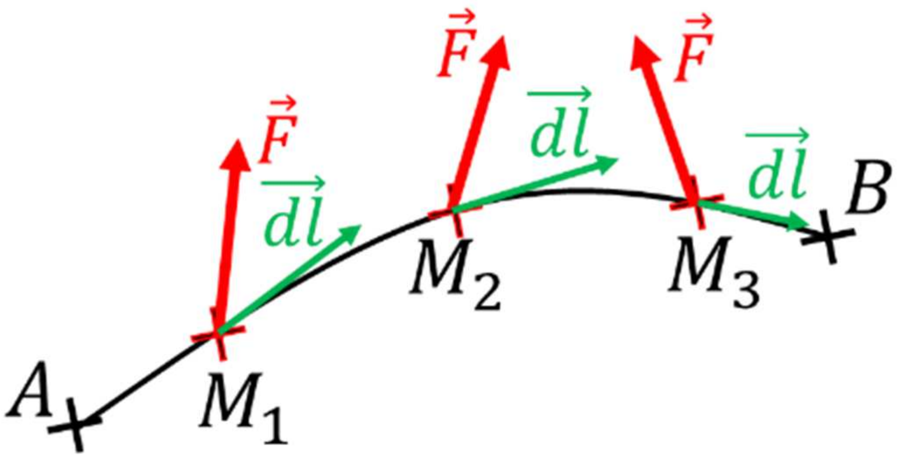


$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$$

$$= F.AB.\cos(\alpha)$$

- $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ➔ force ***motrice*** ➔ $W_{AB}(\vec{F}) > 0$
- $\alpha < -\pi/2$ ou $\alpha > \pi/2$ ➔ force ***résistante*** ➔ $W_{AB}(\vec{F}) < 0$
- Si la force $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement du système ➔ elle ne travaille pas ($W_{AB}(\vec{F}) = 0$).

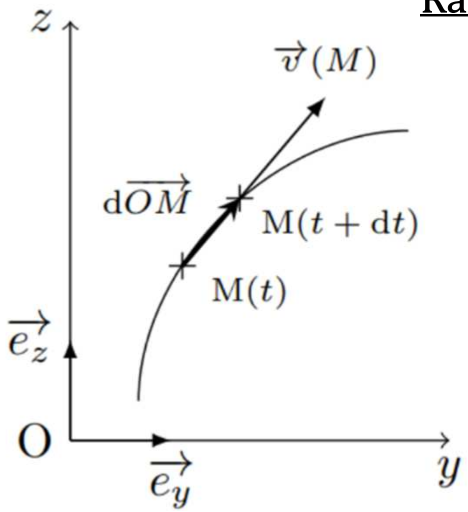
Que faire si la force n’est pas constante?



Travail élémentaire sur un déplacement élémentaire

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

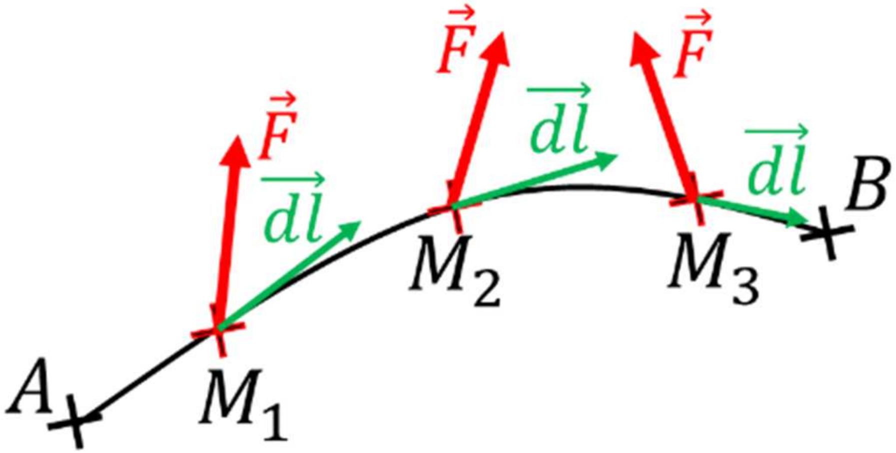
Rappel



$$\begin{aligned}\overrightarrow{dl} &= d\overrightarrow{OM}\\ &= \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)\\ &= \overrightarrow{M(t+dt)M(t)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{dl} = \vec{v}.dt}$$

Que faire si la force n'est pas constante?



<u>Travail élémentaire</u> sur un <u>déplacement élémentaire</u>

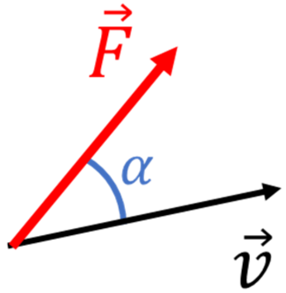
$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

<u>Travail sur la totalité de la trajectoire</u>

$$\boxed{W_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \delta W(\vec{F}) = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$$

⚠ Le travail ***dépend du chemin suivi*** entre A et B. Il ne dépend pas que des points de départ et d'arrivée, comme lorsqu'on intègre une fonction. Savoir exprimer le travail élémentaire sur le chemin suivi est donc important.

Puissance d'une force



$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{v}} = \|\vec{F}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\alpha)$$

L'énergie reçue par le système durant une durée dt vaut donc $\mathcal{P}(\vec{F}).dt = \vec{F}.\vec{v}.dt = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$ et correspond donc au travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ de la force $\vec{F}$:

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}).dt}$$

Si la puissance de la force est constante

$$W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}).\Delta t$$

Application directe

Savoir-faire 1 – Calculer le travail et la puissance d'une force

Un cycliste de masse m = 80 kg (vélo et équipement inclus) effectue l'ascension du Ballon d'Alsace (dénivelé de 700 m).

1. Calculer le travail W du poids lors de cette ascension. Cette force est-elle motrice ou résistante ?

2. Le cycliste roule en ligne droite à 15 km/h sur une pente montante de 10% (donc avec un angle par rapport à l'horizontale de $\alpha = \arctan\left(\frac{10}{100}\right)$). Que vaut la puissance du poids ? Commenter son signe. Comparer avec la puissance dégagée par le corps humain au repos qui est d'environ 100 W.

Que devient l'énergie qu'on met dans le système?

D'après la définition du travail élémentaire, on peut dire que la variation élémentaire de l'énergie cinétique E_c associée au système vaut :

$$\boxed{dE_c = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

Or d'après le PFD (si référentiel galiléen) : $m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

En projetant sur le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$: $m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dl} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}.\overrightarrow{dl}$

Et en utilisant la relation $\vec{v} = \overrightarrow{dl}/dt$, on obtient : $m.\vec{v}.d\vec{v} = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$

On a donc :

$$\boxed{dE_c = m.\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}.m.\vec{v}^2\right)}$$

Que devient l'énergie qu'on met dans le système?

D'après la définition du travail élémentaire, on peut dire que la variation élémentaire de l'énergie cinétique E_c associée au système vaut :

$$\boxed{dE_c = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

Or d'après le PFD (si référentiel galiléen) : $m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

En projetant sur le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$: $m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\overrightarrow{dl} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}.\overrightarrow{dl}$

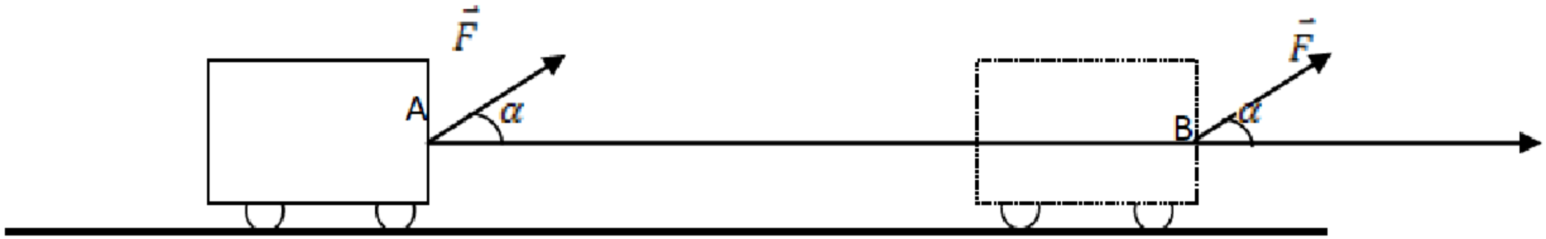
Et en utilisant la relation $\vec{v} = \overrightarrow{dl}/dt$, on obtient : $m.\vec{v}.d\vec{v} = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$

On a donc :

$$\boxed{dE_c = m.\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}.m.\vec{v}^2\right)}$$

On vient d'établir l'expression de l'énergie cinétique!

Théorème de l'énergie cinétique



$$\boxed{dE_c = \sum \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

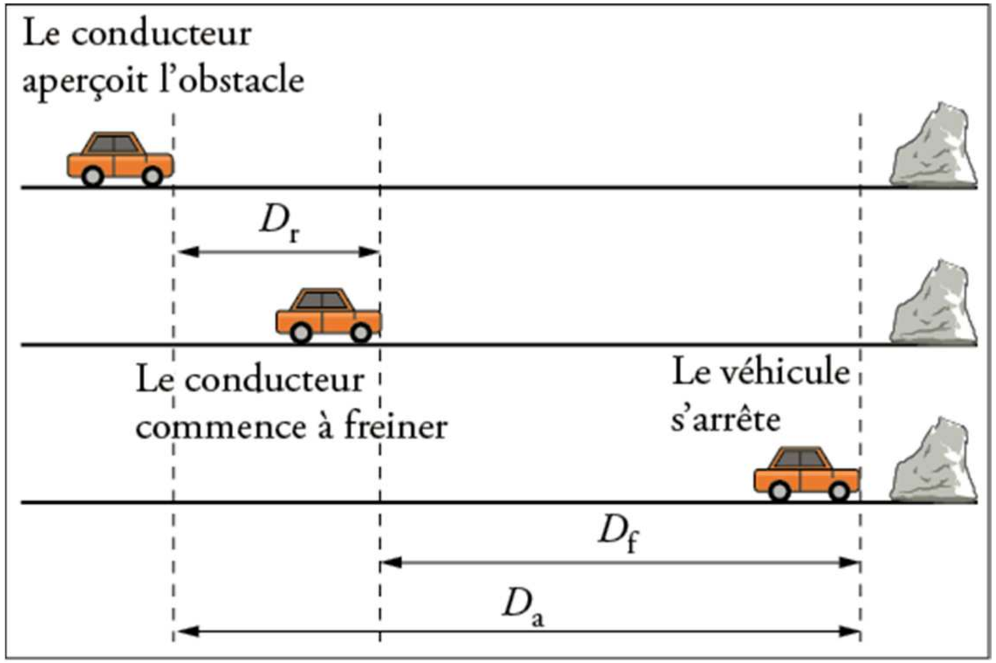
$$\int_{\widehat{AB}} dE_c = \sum \int_{\widehat{AB}} \delta W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{\widehat{AB}}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

$+$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}.m.v^2}$$

Premier exemple de gain de temps



Une voiture de masse $m = 1000$ kg roule à vitesse constante $v_0 = 50$ km.h^{-1}.

Le conducteur comme à freiner à $t = 0$.

On modélise le freinage par une force constante qui s'oppose à la vitesse de la voiture et dont la norme vaut 5000 N.

Déterminer la distance de freinage D_f.

Premier exemple de gain de temps

Oui mais on n'a pas toutes les infos!

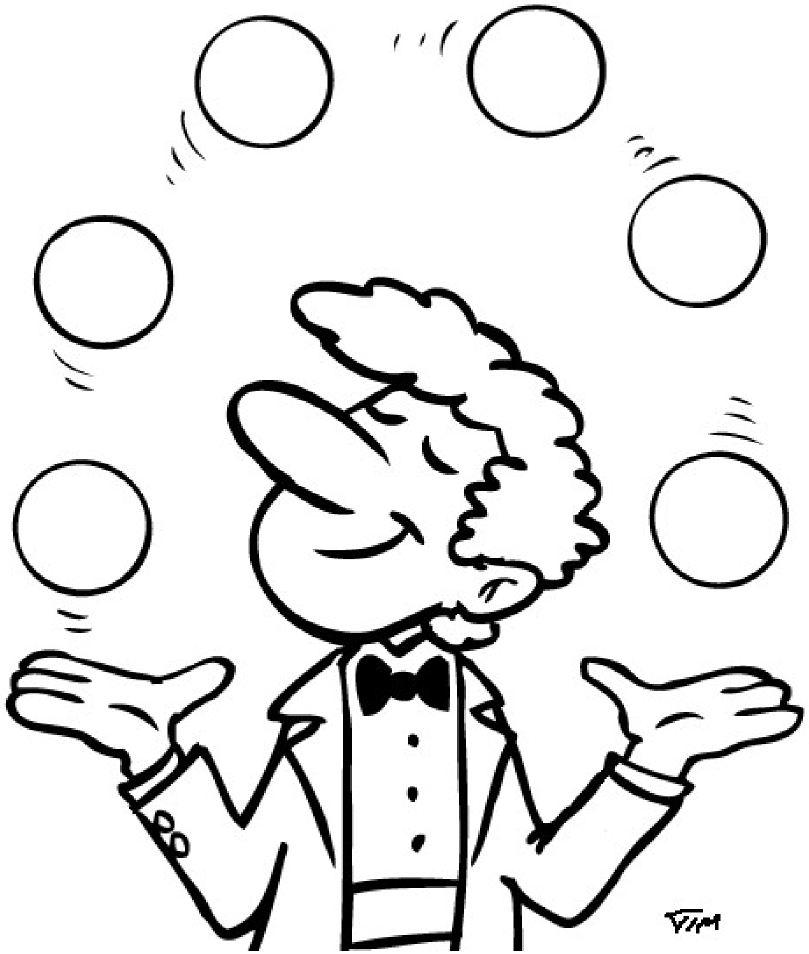
Pour retrouver les équations du mouvement:

Théorème de la puissance cinétique

(ou TEC instantanée)

$$\boxed{\frac{dE_c(M)}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)}$$

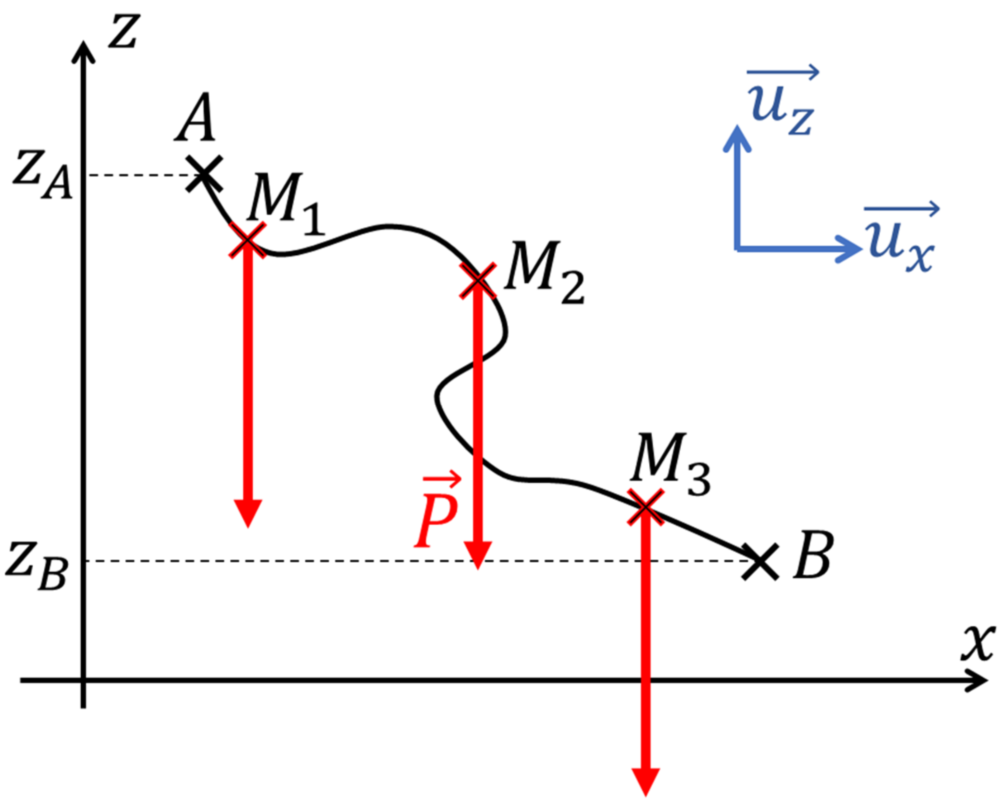
Deuxième exemple de l'application du TEC



Un jongleur lance une balle de masse m depuis une altitude z_A avec une vitesse v_0.

Déterminer l'expression de l'altitude z_B maximum de la balle.

Energie potentielle ?



$$
\begin{aligned}
W_{AB}(\vec{P}) &= \vec{P}.\overrightarrow{AB} \\
&= -m.g.\overrightarrow{u_z}.(z_B - z_A).\overrightarrow{u_z} \\
&= -m.g.(z_B - z_A)
\end{aligned}
$$

Force dont le travail est indépendant du chemin suivi.

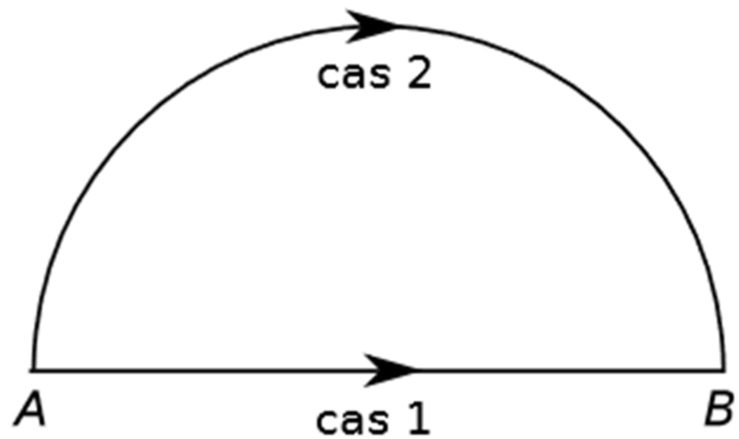
$\Downarrow$

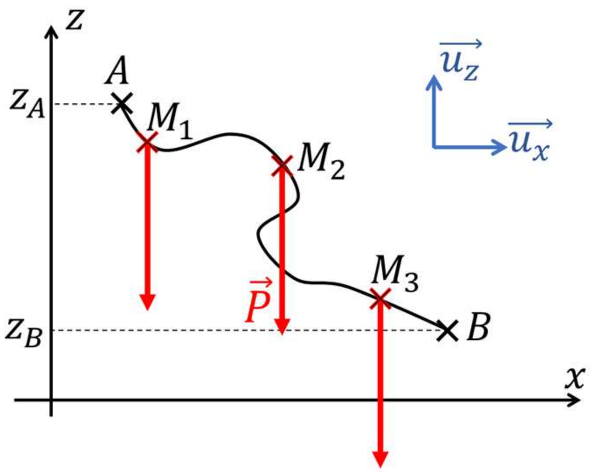
Force conservative.

Savoir-faire 2 – Distinguer force conservative et force non-conservative

Une voiture de masse m = 1200 kg va d'un point A à un point B distants de d = 10 km, en roulant avec une vitesse constante. On modélise les frottements dus à l'air par une force $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$ (avec λ qui dépend de v, constant ici).

- Pour chacune des trajectoires ci-contre, donner l'expression du travail de la force de frottement lors de ce déplacement.
- Conclure sur la nature conservative ou non conservative de cette force.





Energie potentielle ?

Si retour à la case départ, l'énergie redevient la même qu'à l'instant initial!

$$\boxed{dE_p = -dW\left(\vec{F}_{cons}\right)}$$

Le travail de la ***force conservative*** n'est pas vraiment perdu:
L'énergie est stockée sous une autre forme, l'**énergie potentielle**.

$$\boxed{E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}\left(\vec{F}_{cons}\right)}$$

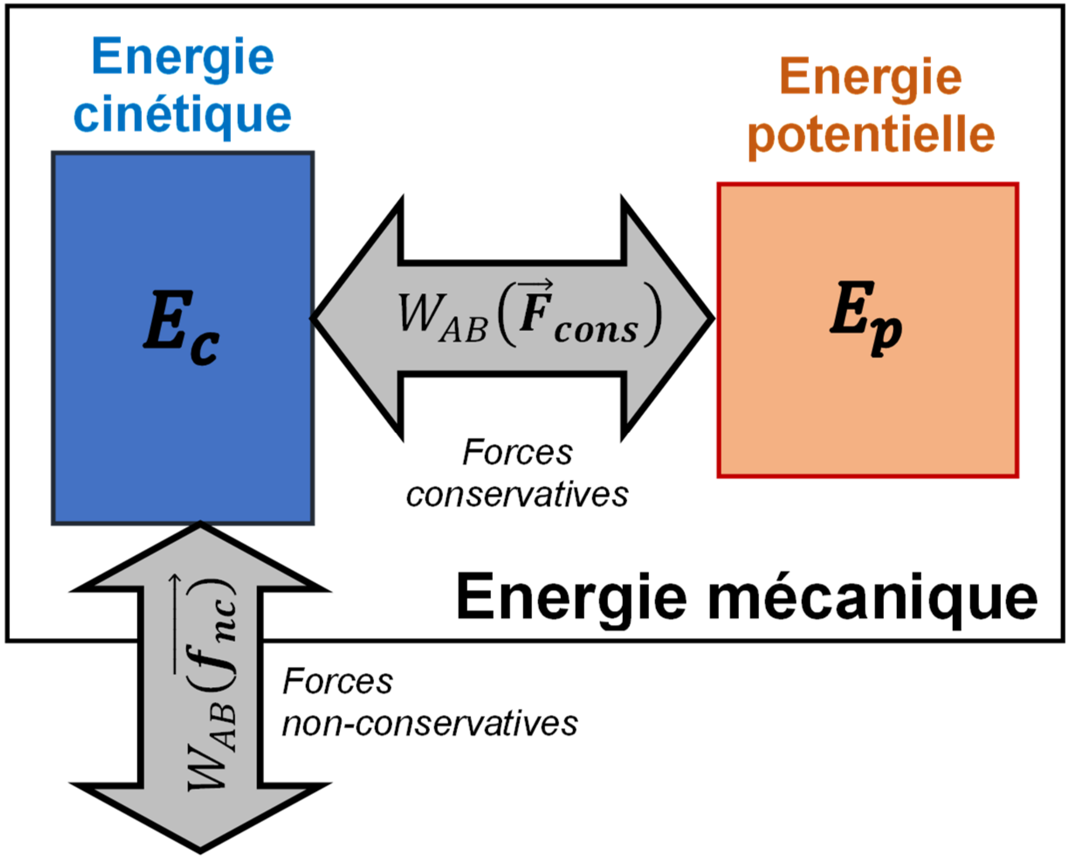
Des énergies potentielles à connaitre

Force	Expression de la force	Energie potentielle E_p
poids	$\vec{P} = m.\vec{g}$	$E_{pp} = m.g.z + c^{ste}$
Force de rappel d'un ressort	$\overrightarrow{F_R} = -k.x.\overrightarrow{u_x}$	$E_{pe} = \frac{1}{2}.k.x^2 + c^{ste}$
Force d'attraction gravitationnelle	$\overrightarrow{F_G} = -G.\frac{m_{Astre}.m_{syst}}{r^2}.\overrightarrow{u_r}$	$E_{pg} = -G.\frac{m_{Astre}.m_{syst}}{r} + c^{ste}$

Il faut savoir *établir* l'expression de E_p :

On projette puis on primitive la force (attention au moins) !

Energie mécanique



$$\boxed{E_m(M) = E_c(M) + E_p(M)}$$

Théorème de l'énergie mécanique

pour un point matériel

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{\widehat{AB}}\left(\overrightarrow{f_{ext,nc}}\right)}$$

Mouvement conservatif

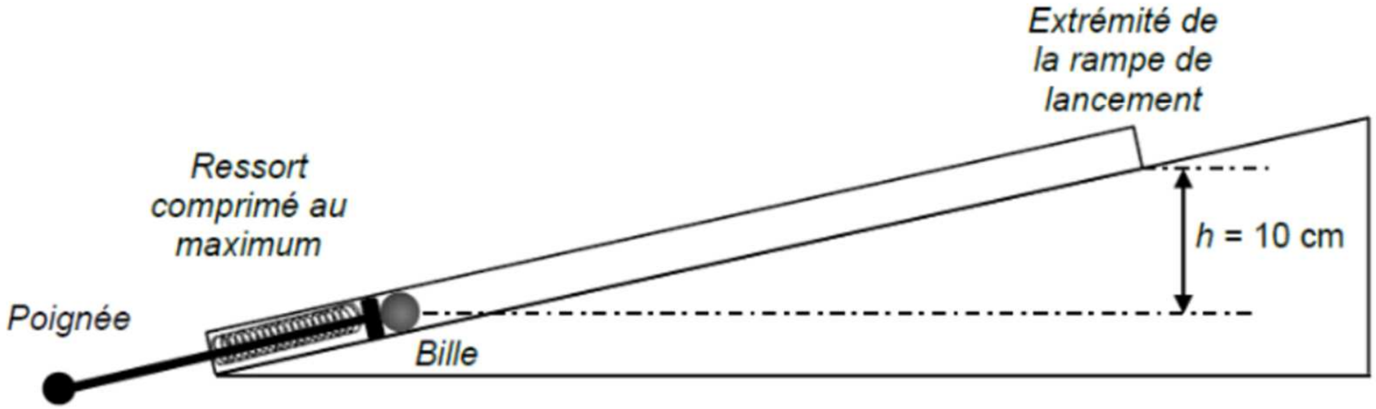
$\overrightarrow{f_{ext,nc}} = 0$

$$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = 0}$$

Application

Vitesse de la bille à l'extrémité de la rampe?

- masse de la bille : m = 100 g ;
- intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2} ;
- hauteur de la rampe de lancement : h = 10 cm ;



Caractéristiques : raideur 33 N.m^{-1} ; écrasement maximal $\Delta\ell = 90$ mm.