Approche énergétique de la mécanique

Mouvement conservatif à 1 degré de liberté

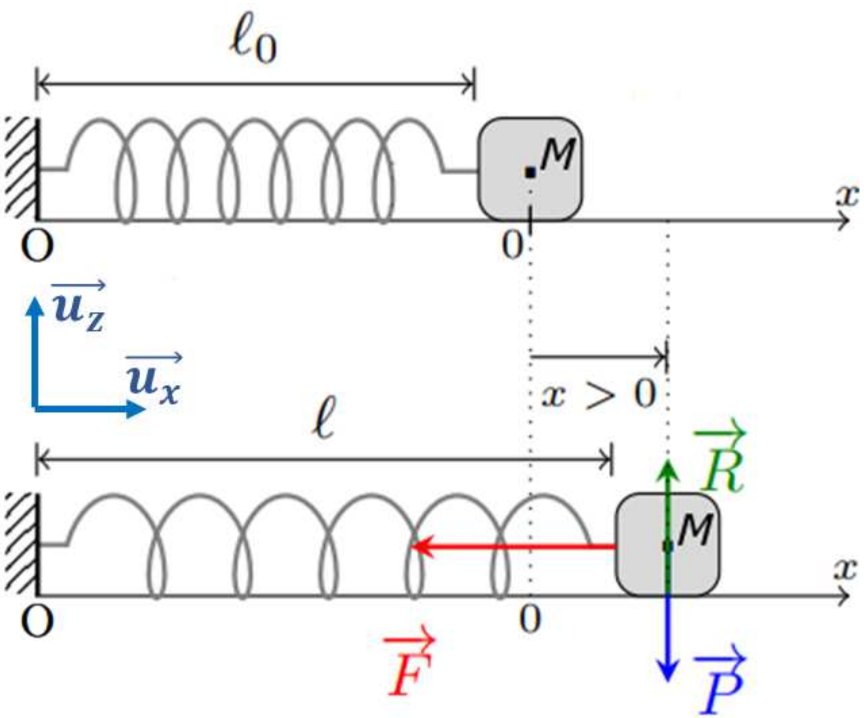
Mouvement conservatif

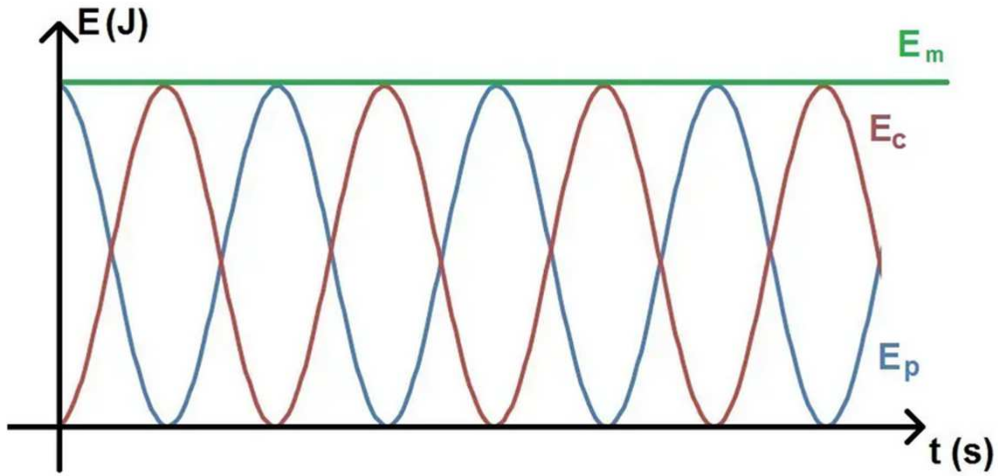
Mouvement conservatif

$\overrightarrow{f_{ext,nc}} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = 0}$

Exemple : {ressort-masse} <u>sans frottements</u>

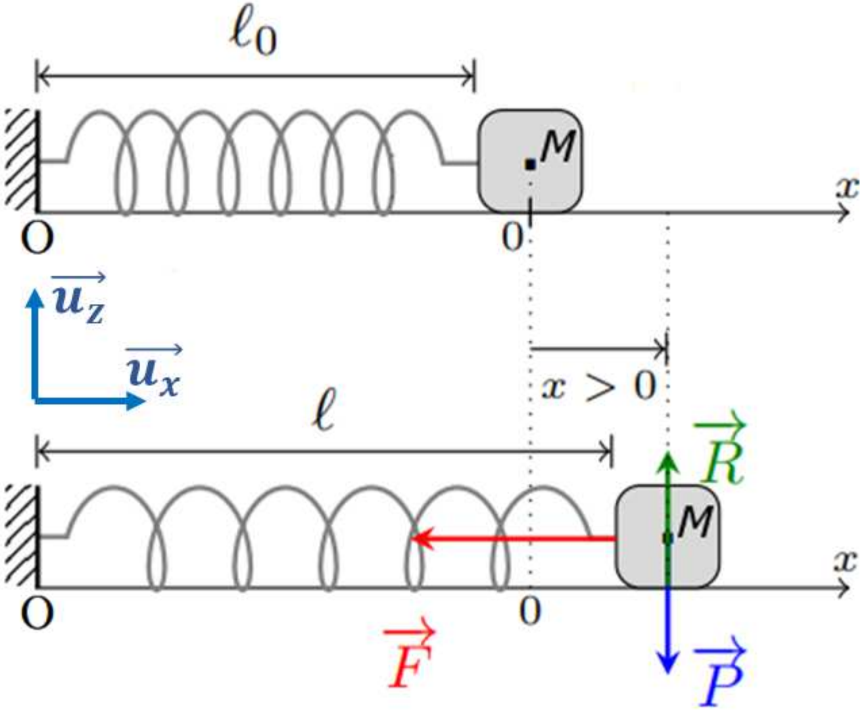
Oscillateur harmonique

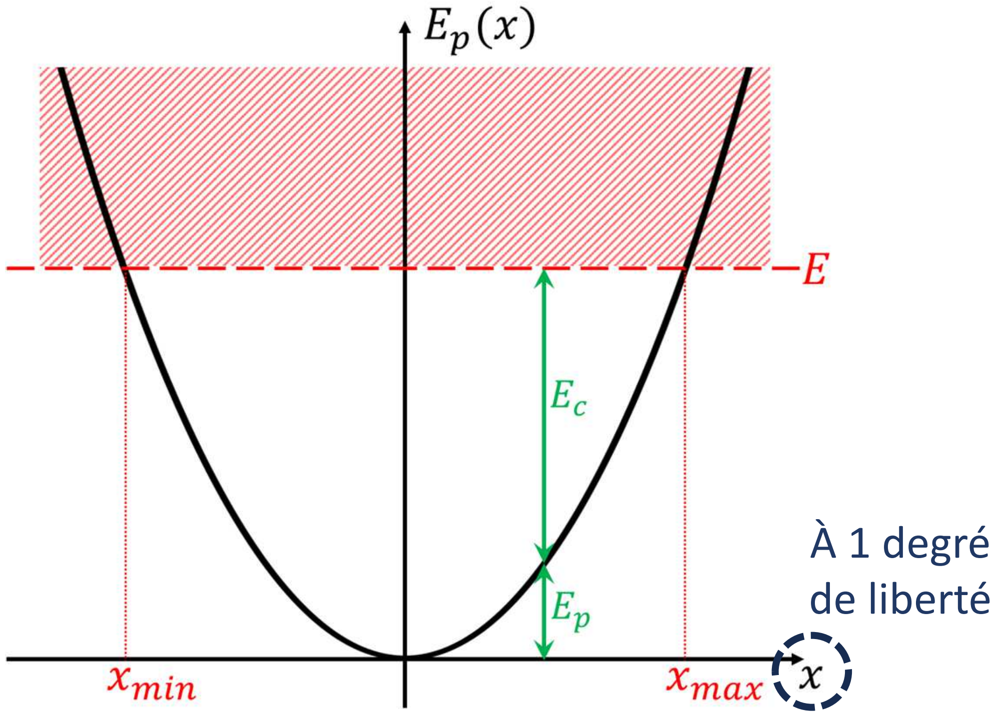




$$\boxed{E_c + E_{pe} = E_m = E_{m,ini}}$$

Exemple : {ressort-masse} sans frottements

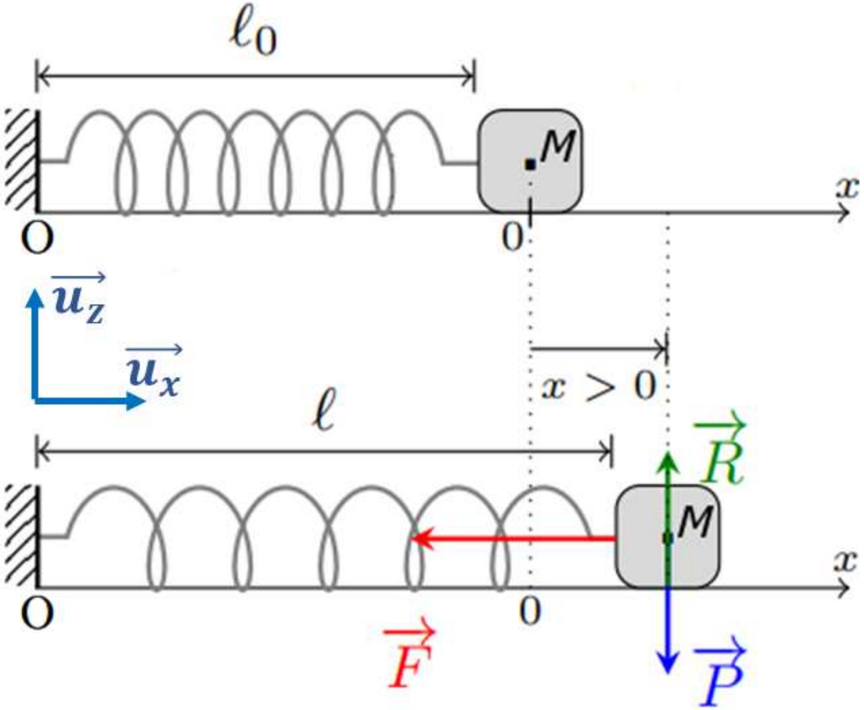




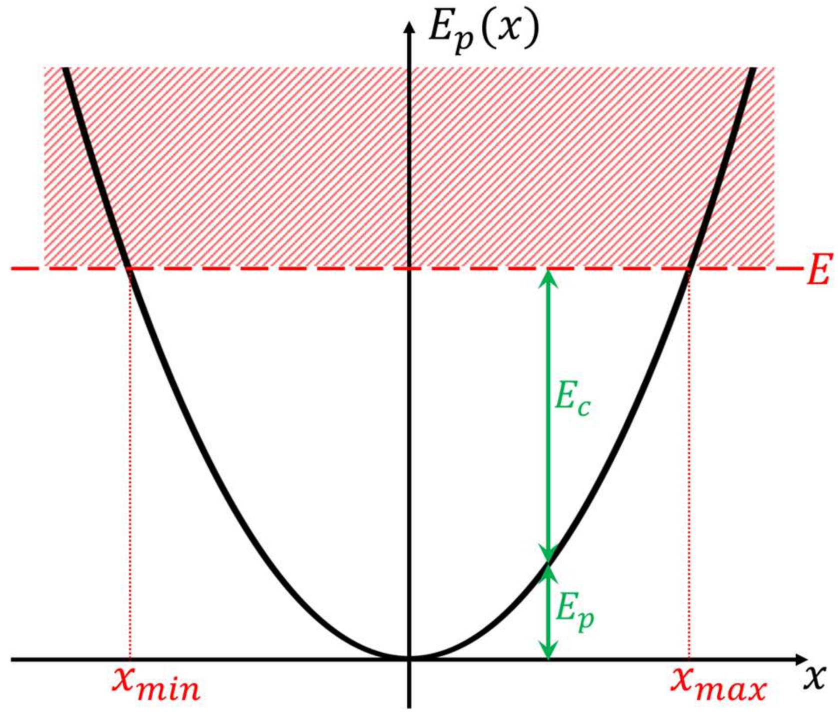
$$\boxed{E_c + E_{pe} = E_m}$$

$$\boxed{E_{pe} = \frac{1}{2}.k.x^2 = E_m - \frac{1}{2}m.v^2}$$

Exemple : {ressort-masse} sans frottements



$$\boxed{E_c + E_{pe} = E_m}$$

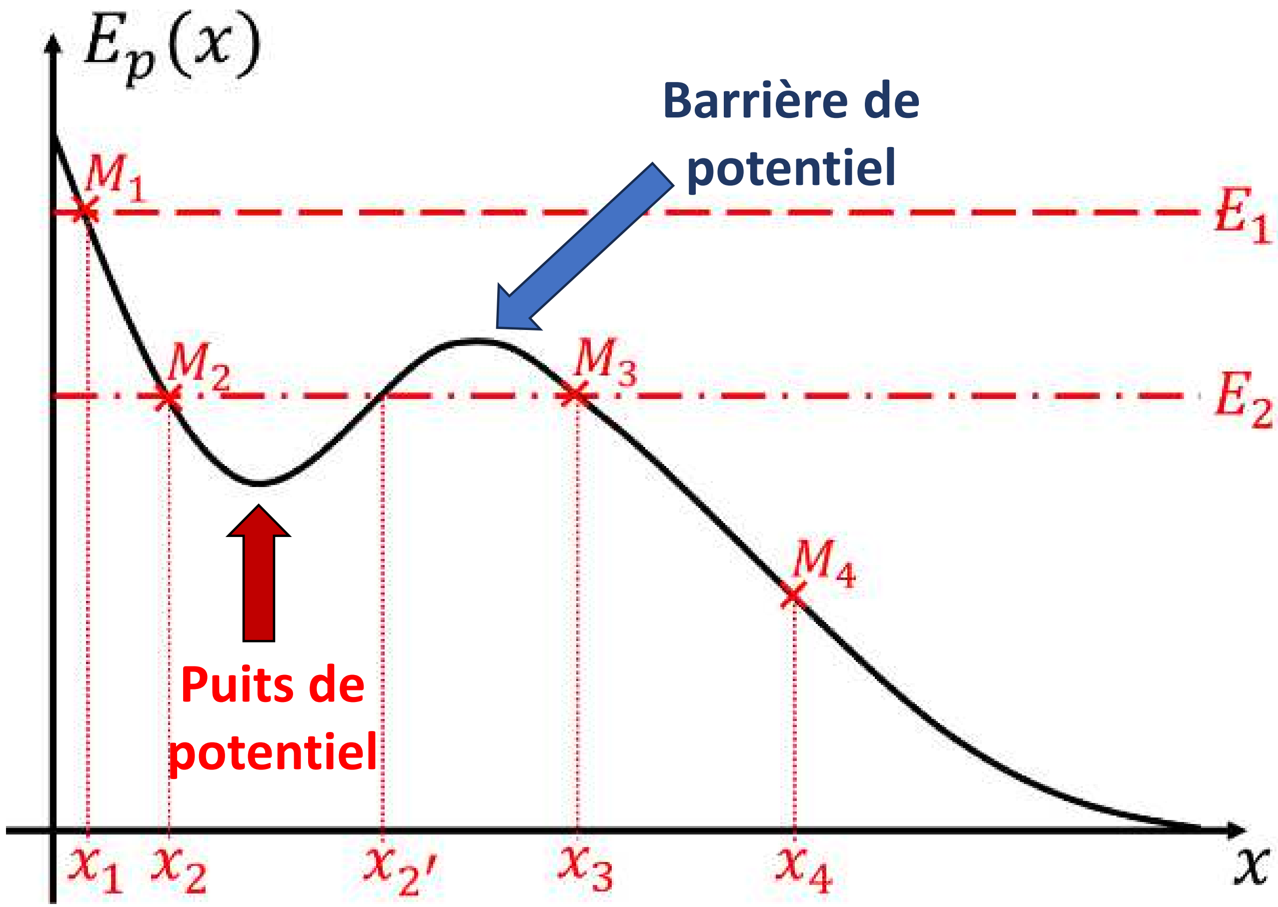


$$E_{pe} \leq E_{m,ini}$$

Puits de potentiel

Généralisation

Méthode : Analyser la courbe $E_p(x)$ pour un mouvement conservatif

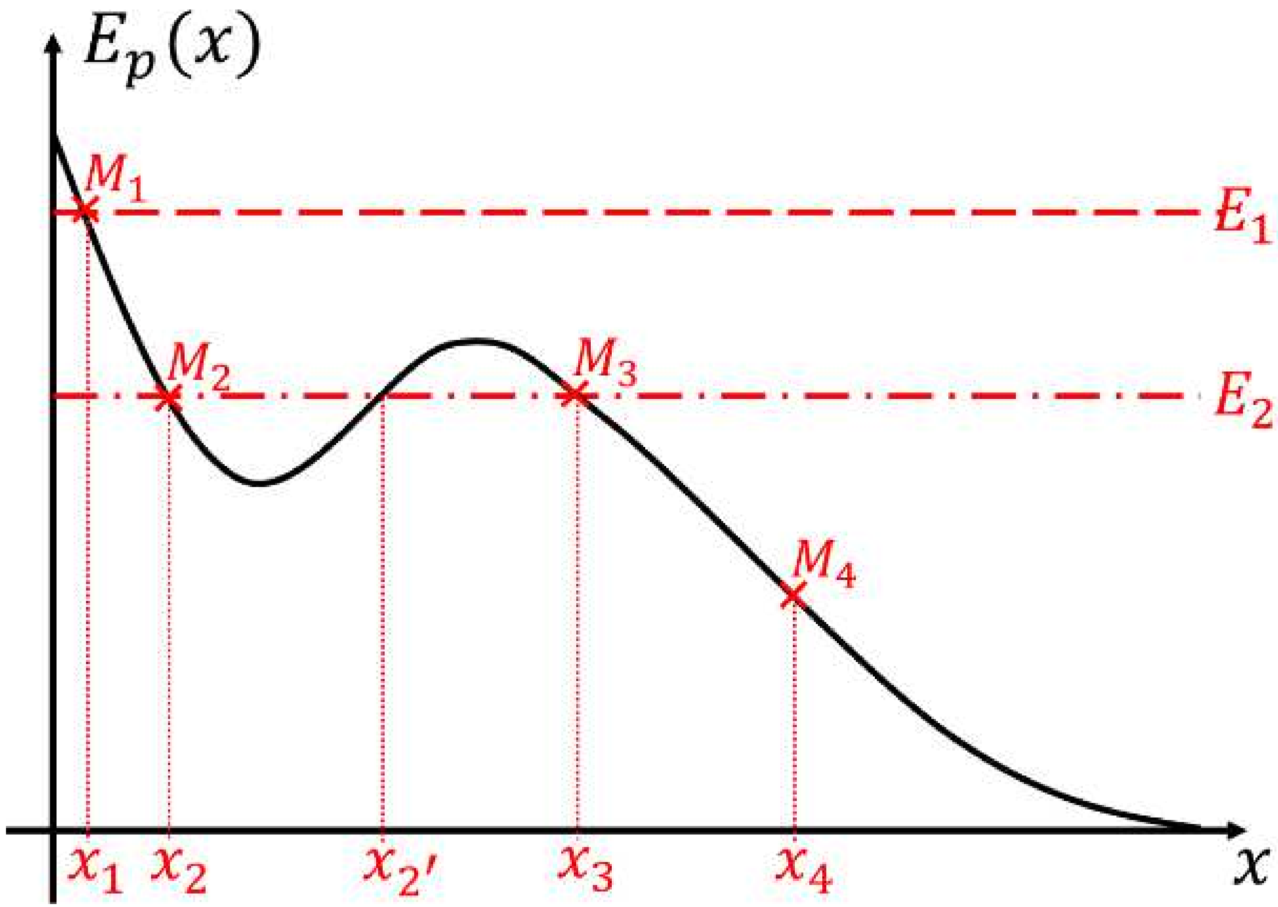


Définitions : Un peu de jargon

- ***Etat lié*** : le système oscille autour d'un minimum d'énergie sans pouvoir s'en éloigner.
- ***Etat de diffusion*** : le système est capable de transformer l'intégralité de son énergie potentielle en énergie cinétique en s'éloignant à l'infini.

Généralisation

Méthode : Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$



$$\vec{F}_{cons}(x) = F(x).\vec{u}_x$$

<u>Par définition:</u>

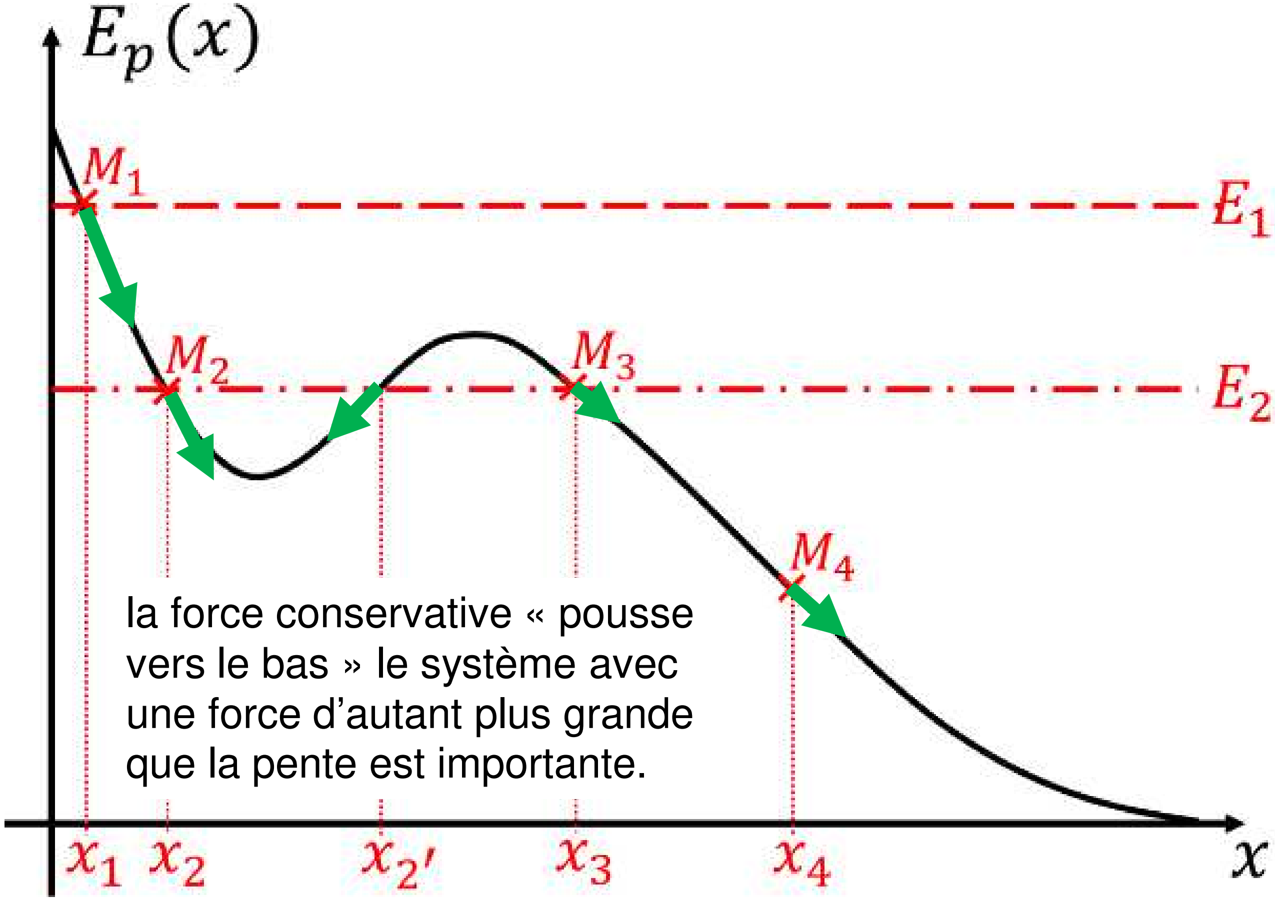
$$dE_p = -\delta W\left(\vec{F}_{cons}\right)$$
$$= -F_{cons}(x).\vec{u}_x.dx.\vec{u}_x$$

$$\boxed{F_{cons}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$

La force $\vec{F}_{cons}$ ***dérive de l'énergie potentielle*** $E_p(x)$.

Généralisation

Méthode : Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$



$$\vec{F}_{cons}(x) = F(x).\vec{u}_x$$

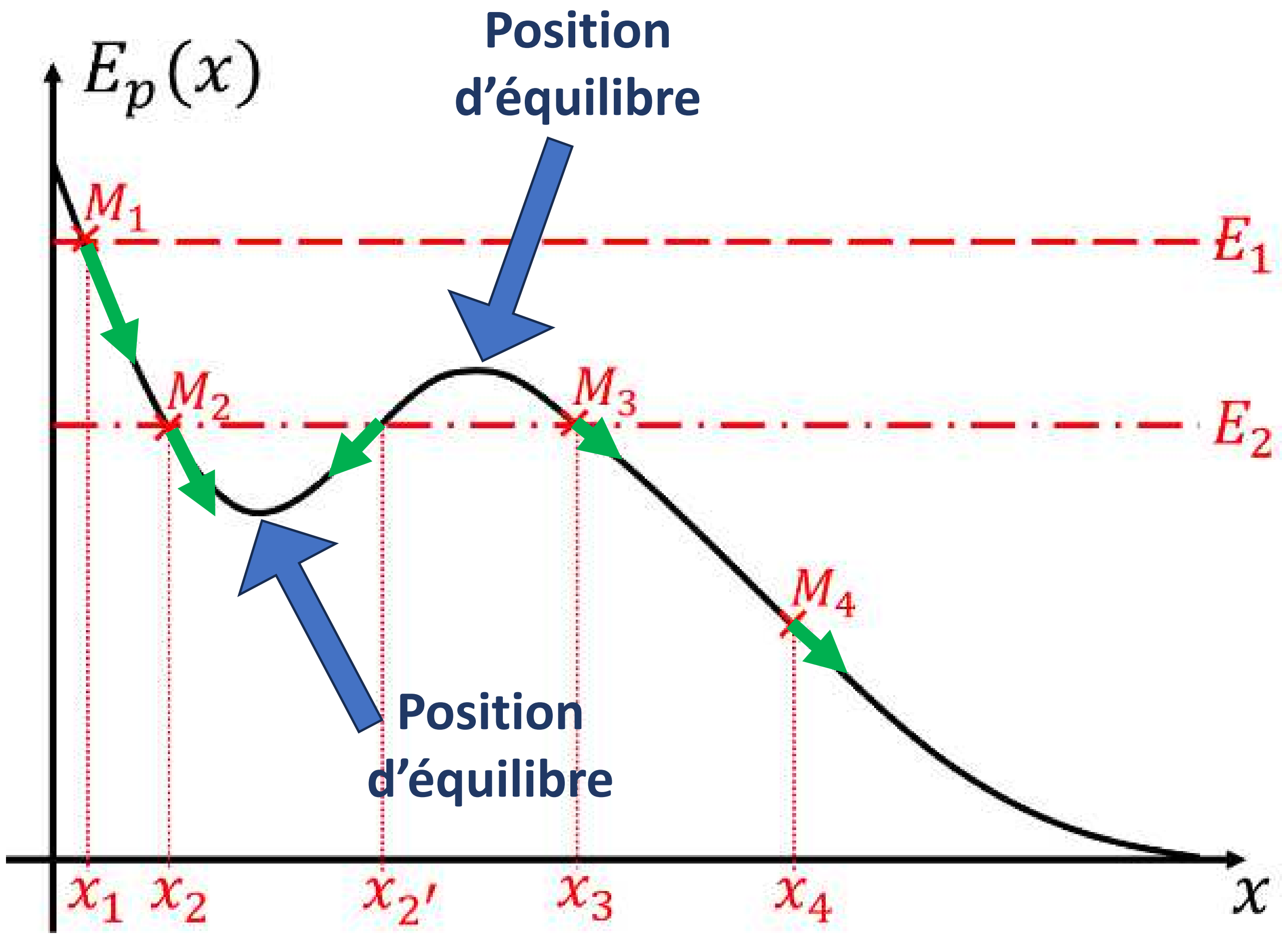
Par définition:

$$dE_p = -\delta W\left(\vec{F}_{cons}\right)$$
$$= -F_{cons}(x).\vec{u}_x.dx.\vec{u}_x$$

$$\boxed{F_{cons}(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}}$$

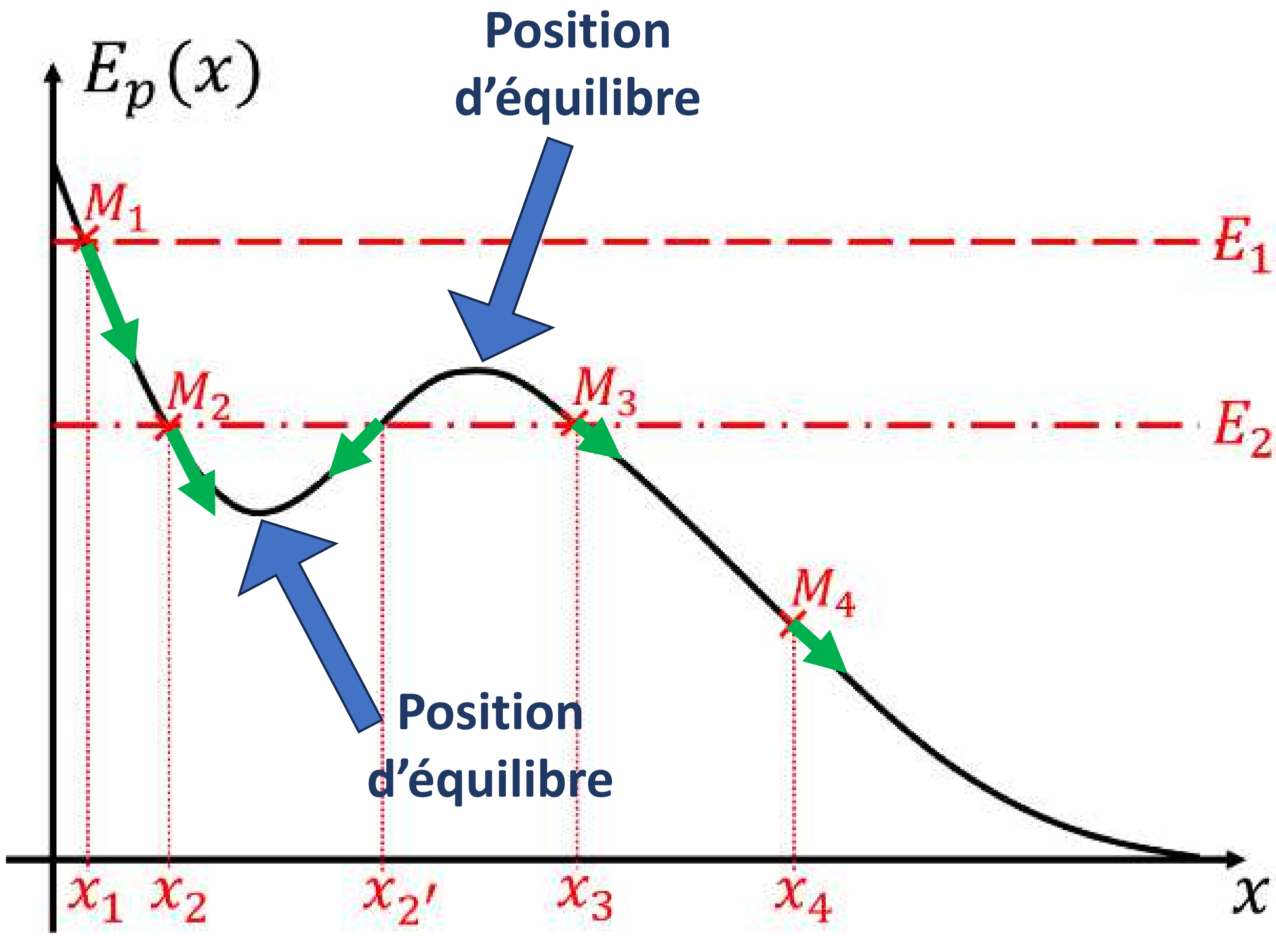
La force $\vec{F}_{cons}$ ***dérive de l'énergie potentielle*** $E_p(x)$.

Quelle position est une position équilibre?



Equilibre si
$F_{cons}(x) = 0$

Quelles positions sont des positions d'équilibre?



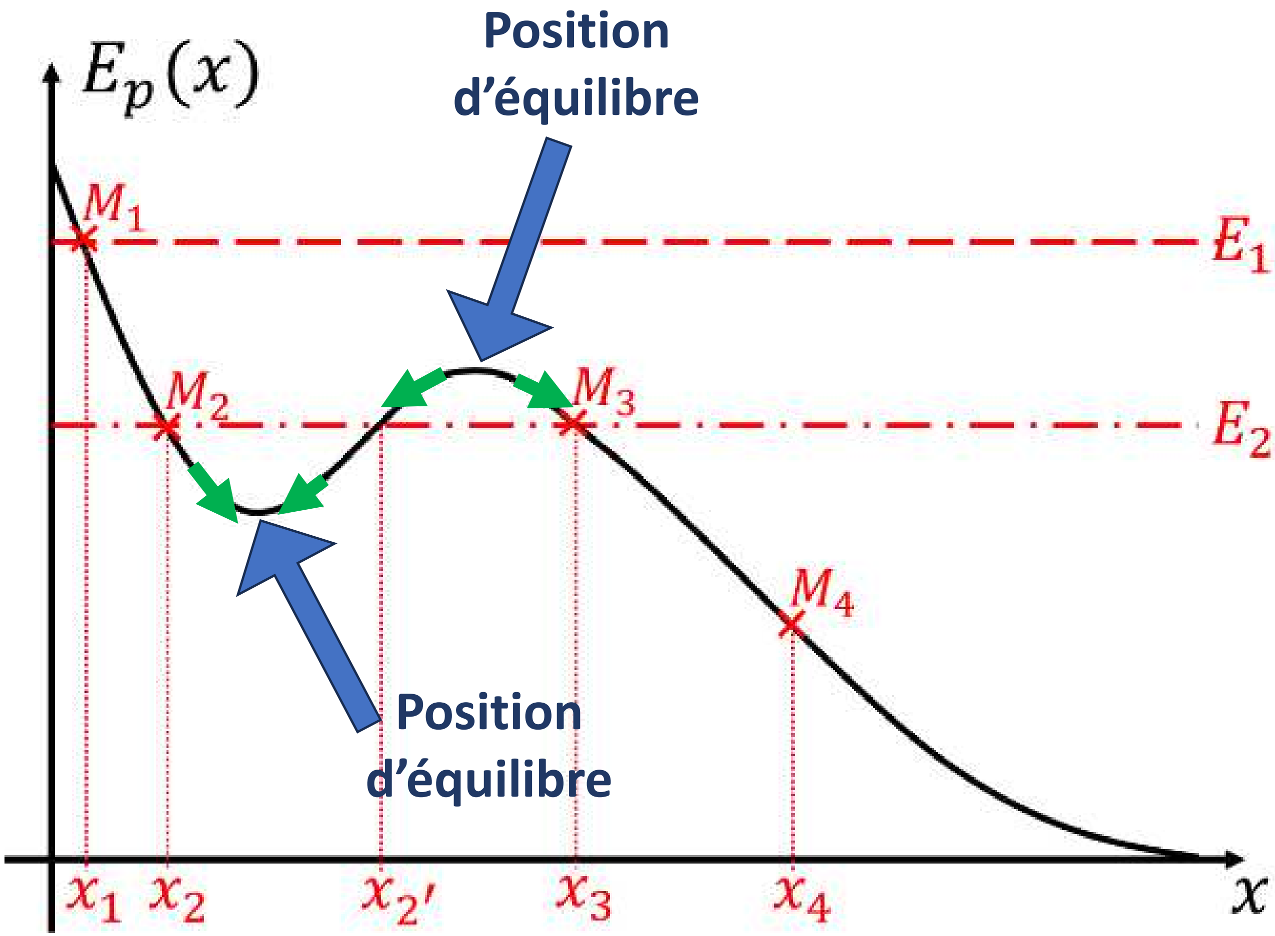
Equilibre si

$$F_{cons}(x) = 0$$

donc

$$\left(\frac{dE_p(x)}{dx} = 0\right)$$

L'équilibre est-il stable?

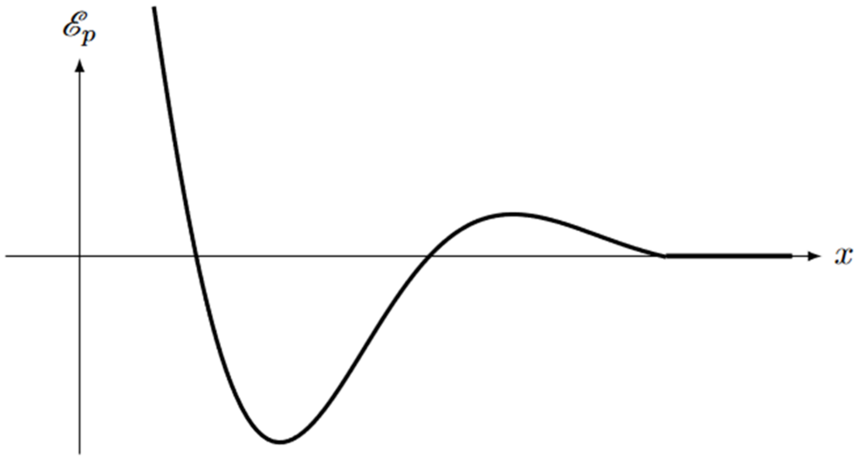


- Stable si minimum de la courbe
- Instable si maximum de la courbe

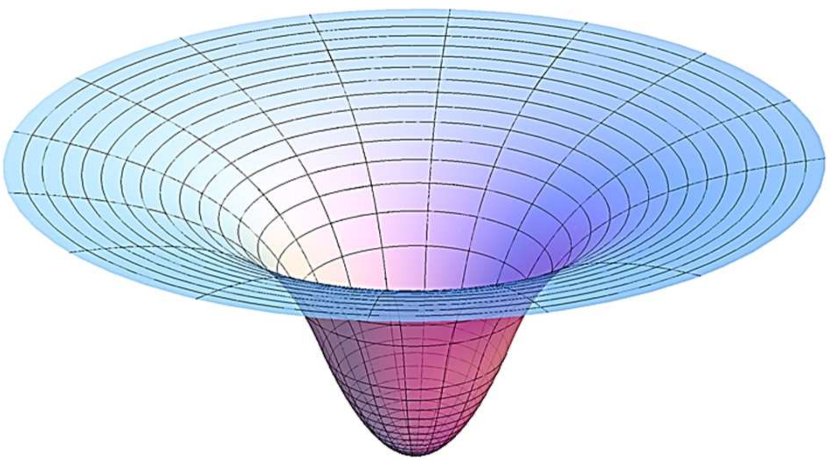
Savoir-faire 4 – Savoir exploiter un graphe d'énergie potentielle pour un mouvement à 1 degré de liberté

On considère un mouvement à un degré de liberté, noté x.

1. Déterminer les positions d'équilibre et donner leur stabilité.
2. Sous quelles conditions le point M sera-t-il dans un état lié ?
3. Donner la direction de la résultante des forces et indiquer qualitativement les zones de forte et de faible intensité de la force.



Méthode : Déterminer qualitativement les propriétés de la force sur le graphe $E_p(x)$



Puits de potentiel avec 2 degrés de liberté

Définition : L'opérateur gradient

On admettra que pour une force $\vec{F}$ conservative dont l'énergie potentielle associée est donnée par $E_p(x,y,z)$, on peut écrire la relation :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial E_p(x,y,z)}{\partial z}.\vec{u}_z\right)$$

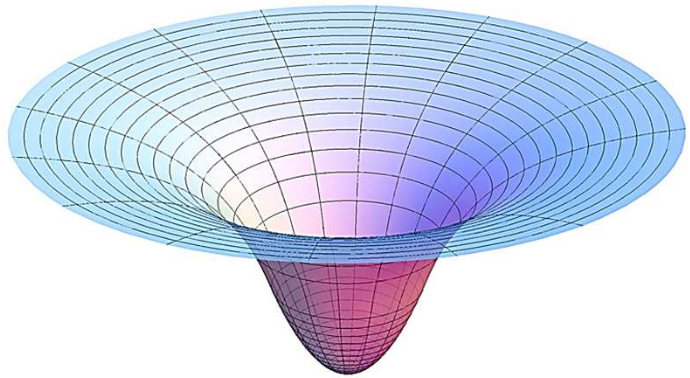
et on définira ***l'opérateur « gradient »*** tel que :

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}.\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{u}_z\right)\left(E_p(x,y,z)\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_p(x,y,z)\right)}$$

Savoir-faire 5 – Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.

L'attraction exercée par la Terre sur ses satellites est associée à une énergie potentielle :



$$E_p(r,\theta\ ,\phi) = -G.\frac{m.M_T}{r}\ + C$$

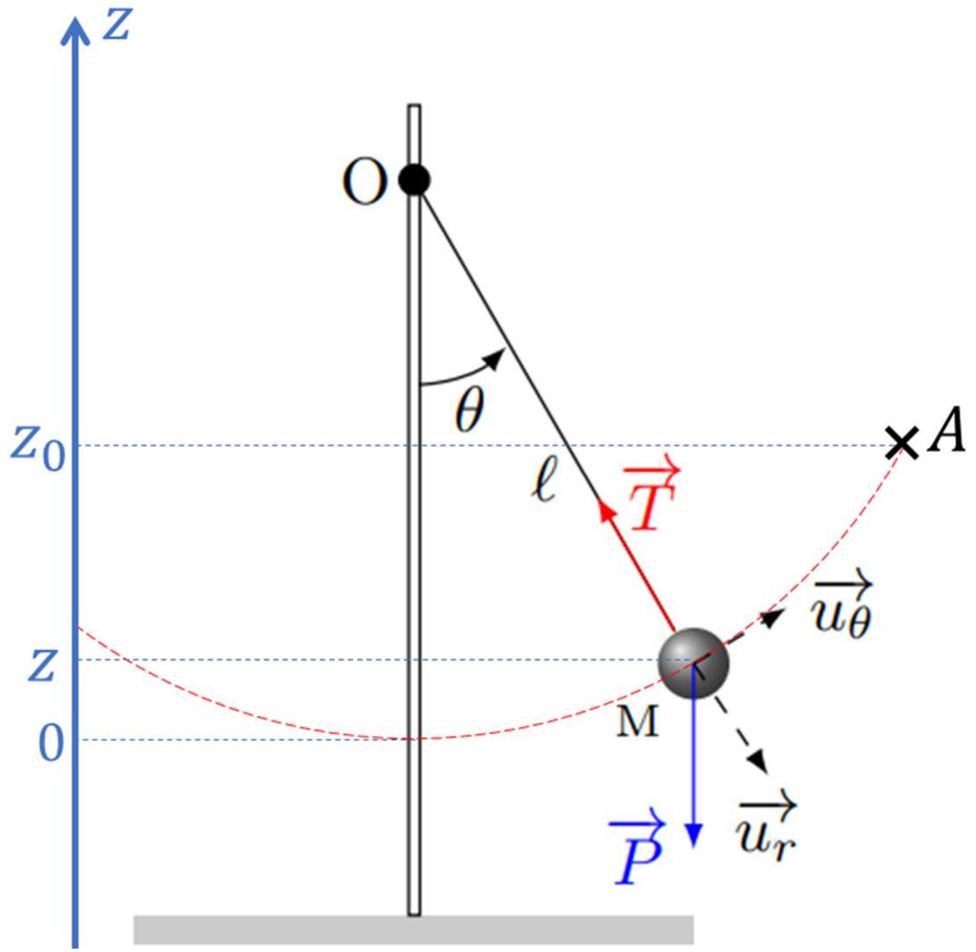
avec C une constante, m la masse du satellite et M_T la masse de la Terre.

1. En déduire l'expression de la force dans le référentiel géocentrique associé à la base sphérique d'origine O.

<u>Donnée</u> : expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\big(f(r,\theta,\phi)\big) = \frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial r}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \theta}.\vec{u}_\theta + \frac{1}{r.\sin(\theta)}.\frac{\partial f(r,\theta,\phi)}{\partial \phi}.\vec{u}_\phi$$

Le pendule simple



Approche type PFD à savoir faire !

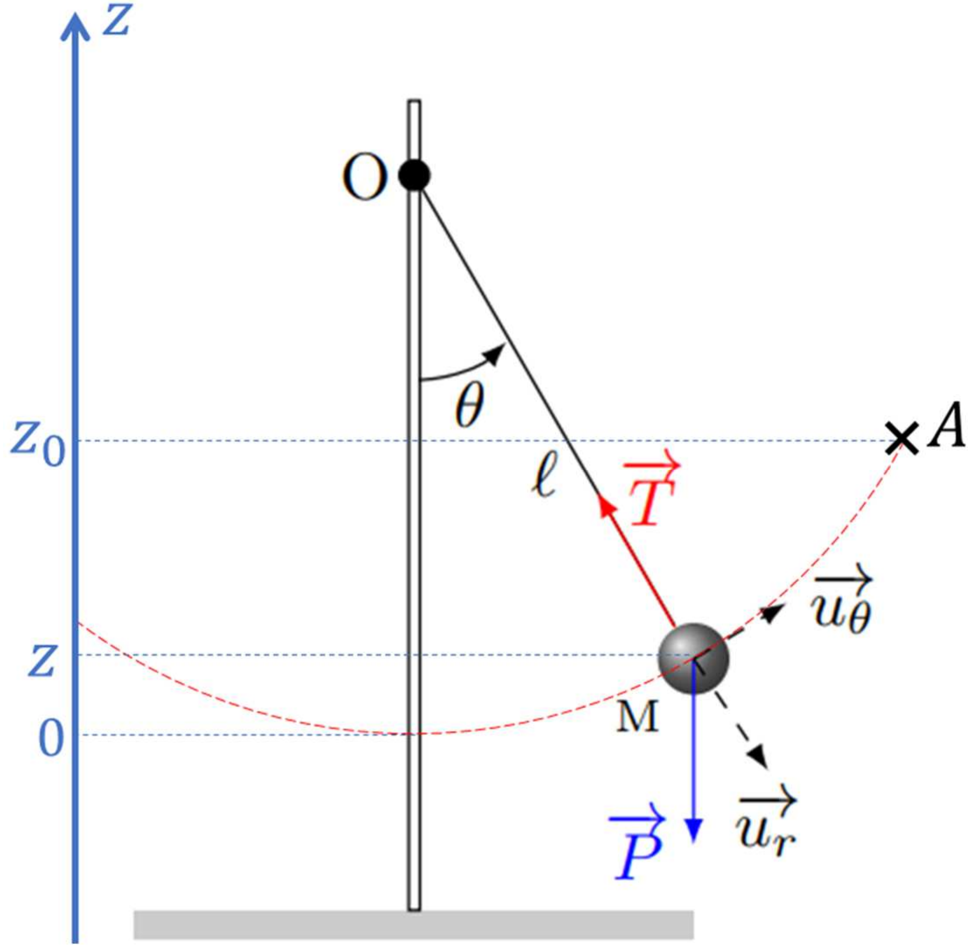
Equation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0}$$

Non-linéaire

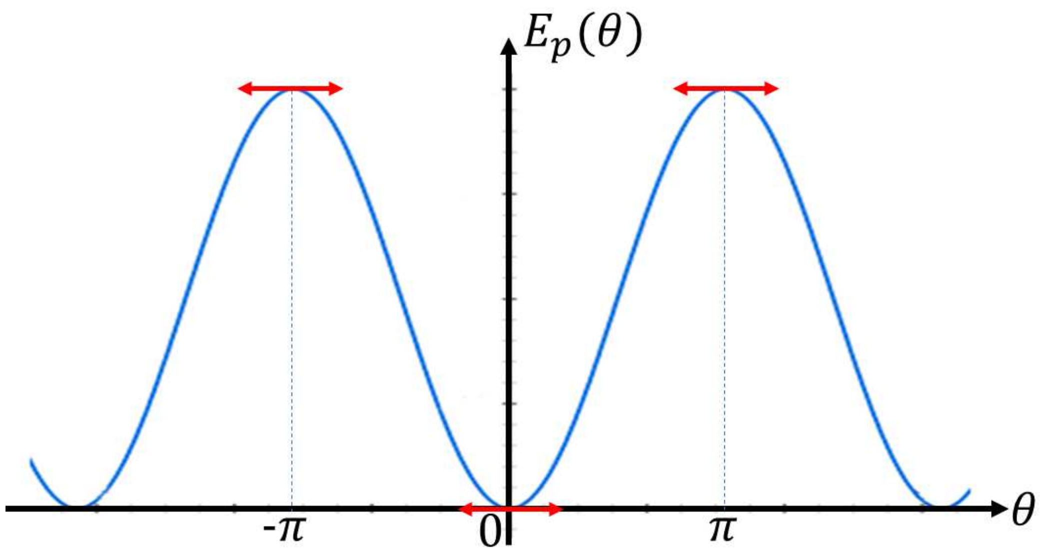
Approche énergétique à savoir faire aussi !
→ exercice 4 du TD

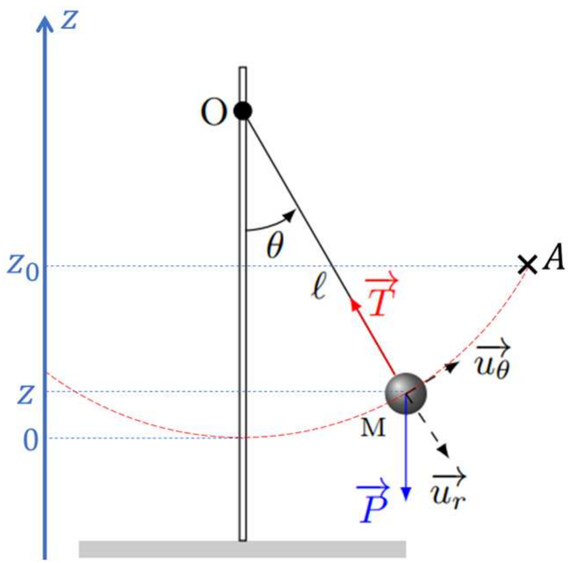
Le pendule simple



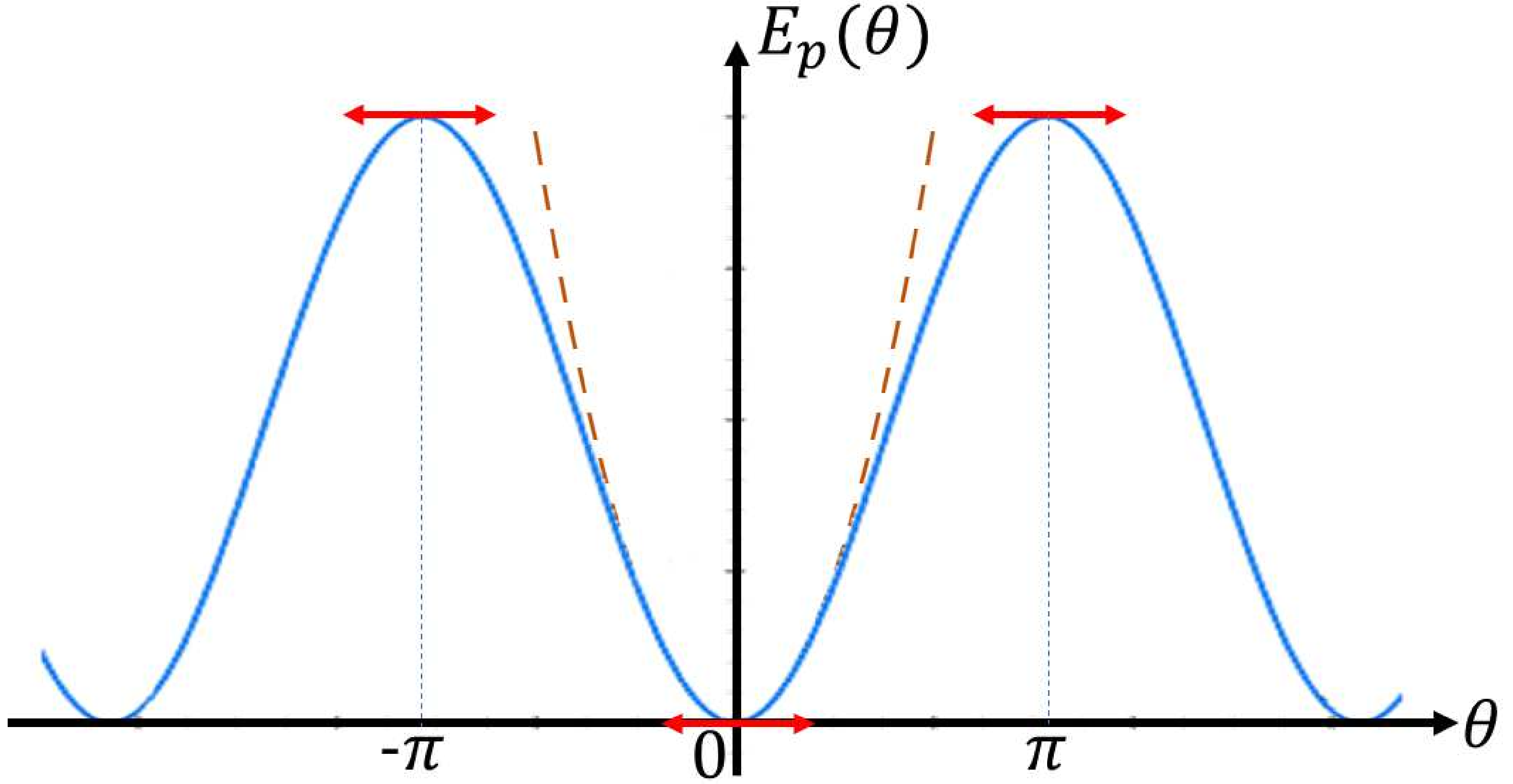
Energie potentielle

$$\boxed{E_{pp} = m.g.\ell.(1 - \cos(\theta))}$$



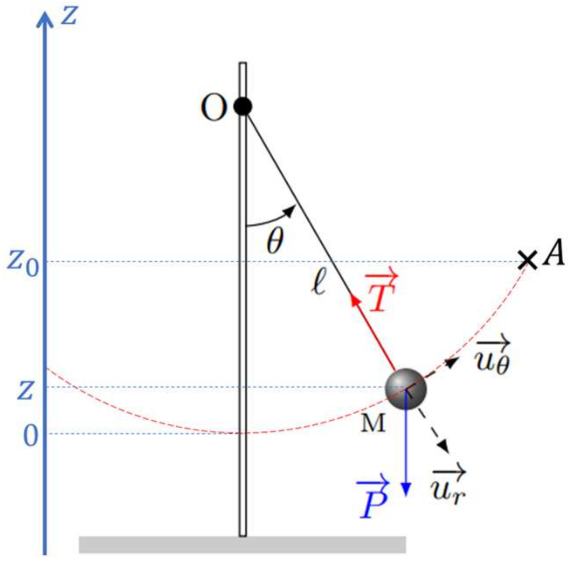


Le pendule simple



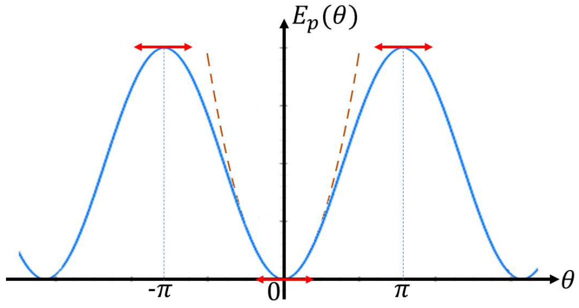
Approximation harmonique

➔ Le fond du puits ressemble à une parabole!



Le pendule simple

Approximation harmonique



Point maths : Développement limité

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0).f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{o\big((x-x_0)^2\big)}_{\substack{\text{termes négligeables} \\ \text{devant les autres}}}$$

Energie potentielle

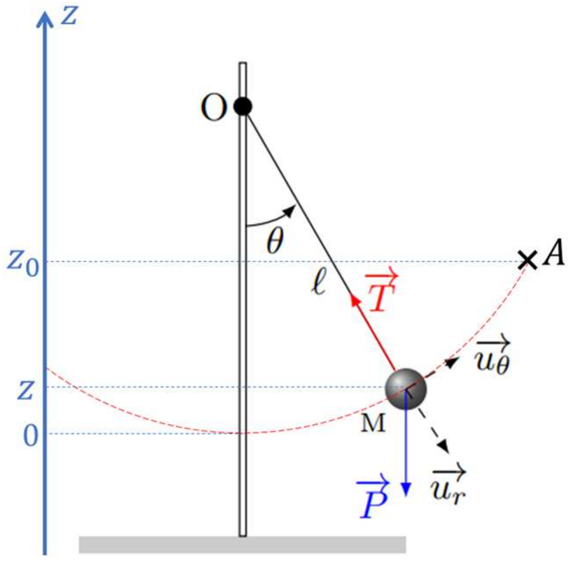
$$\boxed{E_{pp} = m.g.\ell.(1 - \cos(\theta))}$$

Approximation harmonique

Energie potentielle autour du fond du puits ($x = 0$)

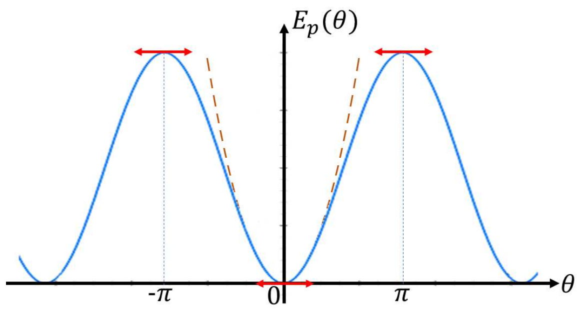
$$\boxed{E_{pp} = m.g.\ell.\frac{\theta^2}{2}}$$

Une parabole !



Le pendule simple

Approximation harmonique



Point maths : Développement limité

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0).f'(x_0)}_{\text{terme d'ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2!}.f''(x_0)}_{\text{terme d'ordre 2}} + \underbrace{o\left((x - x_0)^2\right)}_{\text{termes négligeables devant les autres}}$$

Equation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\sin(\theta) = 0}$$

Approximation harmonique

Equation du mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\theta = 0}$$

Oscillateur harmonique!

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2.\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$