# Mouvements de rotation

## Plan du cours



*Ressource concernant les différents repères :* http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M01_G01/co/Contenu%2027.html

# 1. La base polaire (2D)

## 1.1. Coordonnées en base polaire

La base polaire est une orthonormée directe : $(\overrightarrow{u_r}\,;\,\overrightarrow{u_\theta})$.
Le vecteur position s'exprime alors par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \mathrm{r}.\overrightarrow{u_r}}$$

$(r, \theta)$ sont appelés coordonnées polaires du point M.

## 1.2. Lien avec la base cartésienne : relation de passage

On peut exprimer la base $(\overrightarrow{u_r}\,;\,\overrightarrow{u_\theta})$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}\,;\,\overrightarrow{u_y})$ : $\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,.\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,.\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\,.\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta).\overrightarrow{u_y} \end{cases}$

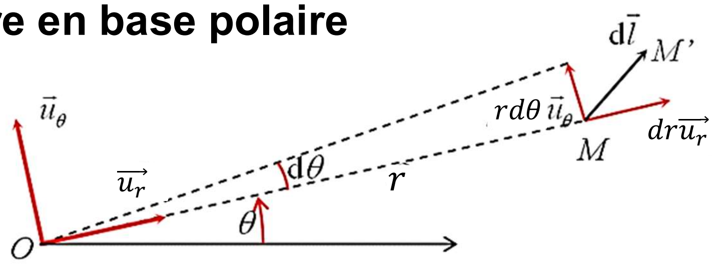
Et on peut, de même, lier les deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$$

## 1.3. Déplacement élémentaire en base polaire

Le vecteur déplacement élémentaire est le déplacement infiniment petit $d\vec{l}$ réalisé lors d'un temps infiniment court $dt$ :

$$\boxed{d\vec{l} = dr.\overrightarrow{u_r} + r.\mathrm{d}\theta.\overrightarrow{u_\theta}}$$




## 1.4. Vitesse en base polaire

La vitesse est définie par : $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{l}}{dt}$. On a donc : $\vec{v}(t) = \frac{dr.\overrightarrow{u_r}+r.\mathrm{d}\theta.\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{\mathrm{d}\theta}{dt}.\overrightarrow{u_\theta}$

En utilisant la notation $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ pour indiquer une dérivation par rapport au temps, on obtient :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \underbrace{\dot{r}.\overrightarrow{u_r}}_{\text{vitesse radiale}} + \underbrace{r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}}_{\text{vitesse tangentielle}}}$$

Il est également possible de retrouver cette expression en partant de l'expression de $\overrightarrow{OM}$.
En utilisant l'expression des dérivées temporelles de la base polaire (à connaitre) :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{u_r}}$$

On obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d(r.\overrightarrow{u_r})}{dt}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\left(\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}\right)$$
$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}}$$

### 1.5. Accélération en base polaire

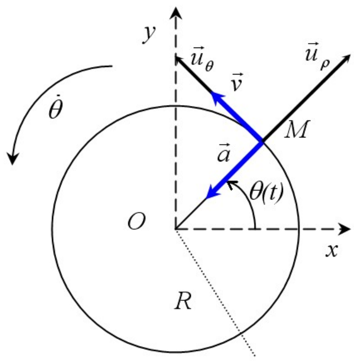
De la même façon, on a :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}\right)}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{r}.\overrightarrow{u_r} + \dot{r}.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + r.\dot{\theta}.\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$
$$\vec{a}(t) = \ddot{r}.\overrightarrow{u_r} + \dot{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + r.\dot{\theta}.\left(-\dot{\theta}.\overrightarrow{u_r}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right).\overrightarrow{u_r} + \left(2.\dot{r}.\omega + r.\ddot{\theta}\right).\overrightarrow{u_\theta}}$$

## 2. Cas particulier : l'étude d'un mouvement circulaire

Le mobile $M$ décrit un cercle de rayon $r = R$ constant, de centre $O$, à la ***vitesse angulaire*** $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}$.
Puisque $r =$ constante, $\dot{r} = 0$.




- *<u>Déplacement élémentaire</u>* : $d\vec{l} = r.\mathrm{d}\theta.\overrightarrow{u_\theta}$
- *<u>Vitesse</u>* : $\vec{v}(t) = r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$
- *<u>Accélération</u>* : $\vec{a}(t) = -r.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{u_r} + r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$

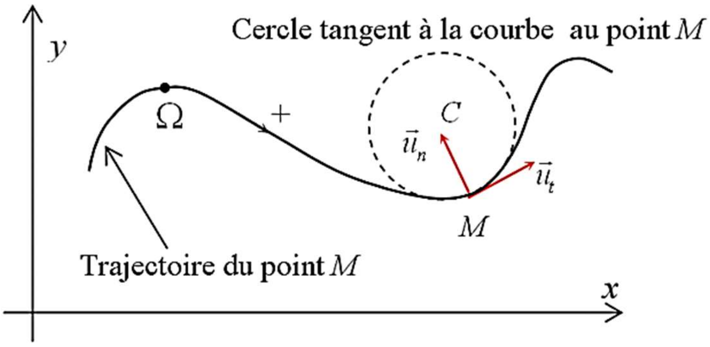
Avec $v = \|\vec{v}\| = r.\dot{\theta}$, on obtient : $\boxed{\boldsymbol{\vec{a}(t) = -\frac{v^2}{r}.\overrightarrow{u_r} + \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_\theta}}}$

Pour un mouvement circulaire uniforme, on a en plus : $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} = c^{ste}$ et donc $\boldsymbol{\frac{dv}{dt} = 0}$.
L'accélération est dans ce cas ***radiale*** et ***centripète*** (vers le centre de rotation) :

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{MCU}}(t) = -\frac{v^2}{r}.\overrightarrow{u_r} = -r.\omega^2.\overrightarrow{u_r}}$$

# 3. Le repère de Frenet (mouvement plan)

## 3.1. Définition




Le repère de Frenet est constitué en prenant pour origine le point M. Le trièdre de Frenet est un repère mobile : les éléments de ce repère changent selon le point considéré.

La construction du repère de Frenet fait apparaître un cercle de centre $C$ et de rayon $\boldsymbol{R}$ localement tangent en $M$ à la trajectoire : il est appelé *cercle osculateur*. Le rayon $\boldsymbol{R}$ de ce cercle correspond alors au rayon de courbure de la trajectoire au point considéré et $C$ est le centre de courbure, ou centre instantané de rotation.

Cette base est constituée de deux vecteurs mobiles $\overrightarrow{u_n}$ et $\overrightarrow{u_t}$ :

- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ est tangent à la trajectoire, au point M où se trouve le mobile. Ce vecteur est orienté *dans le sens du mouvement*, tel que : $\vec{v} = v.\overrightarrow{u_t}$
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_n}$ est normal à la trajectoire. Il est orienté *vers l'intérieur* de la courbe.

Le repère de Frenet de Frenet se note donc : $(M; \overrightarrow{u_n}; \overrightarrow{u_t})$.

## 3.2. Accélération dans le repère de Frenet

Par analogie avec le cas du mouvement circulaire, on admettra que pour un mouvement quelconque :

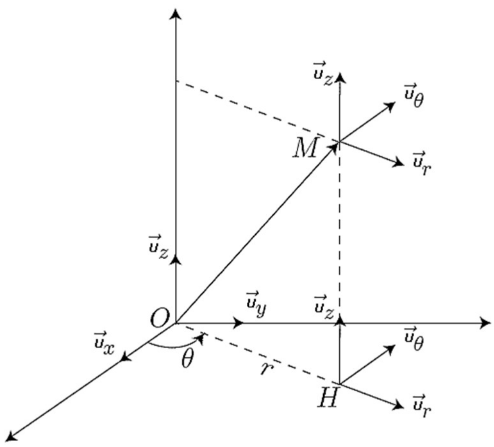
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}.\overrightarrow{\boldsymbol{u_n}} + \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}.\overrightarrow{\boldsymbol{u}_\mathbf{t}}}$$

où l'on définit $\boldsymbol{R} = CM$ comme le rayon de courbure de la trajectoire au point $M$.

- La composante normale de l'accélération $a_n = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}}$ est toujours positive : elle est toujours tournée vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré. Elle est d'autant plus importante que le rayon de courbure est faible (virage serré).
- La composante tangentielle de l'accélération $a_t = \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}}$ indique si la valeur de la vitesse change. Si le mouvement est uniforme ce terme est nul.

# 4. La base cylindrique (3D)

Les coordonnées cylindriques sont une généralisation en 3D des coordonnées polaires. Elles étendent ces dernières à une troisième dimension : la hauteur selon un axe $z$.



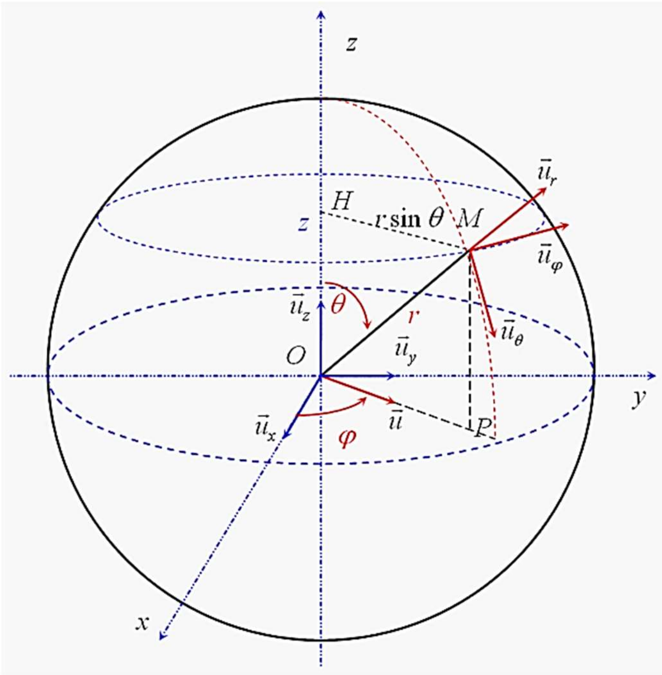

Repérage et définitions :

- Un point $M$ est repéré par trois coordonnées : les distances $r$ et $z$, et l'angle $\theta$.
- $r$ et $\theta$ ont les mêmes rôles qu'en coordonnées polaires :
  $r = HM$ est la distance à l'axe $Oz$,
  $\theta$ est l'angle entre $HM$ et l'axe des $x$.
- $z$ est la hauteur du point $M$ par rapport au plan $xOy$.
- $r \geq 0,\ \ \theta \in [0,2\pi]\ , z \in \mathbb{R}$.
- En $M$ on construit un repère orthonormé direct $\overrightarrow{u_r}$ , $\overrightarrow{u_\theta}$ , $\overrightarrow{u_z}$.

La coordonnée $z$ étant indépendante des 2 autres coordonnées, l'expression pour la vitesse $v_z$ et l'accélération $a_z$ restent les mêmes qu'en coordonnées cartésiennes.

*Remarque* : norme de la vitesse $v = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$

# 5. La base sphérique




Un point $M$ de l'espace est repéré dans ces systèmes par les 3 coordonnées « sphériques » suivantes :

- la distance $\boldsymbol{r}$ à l'origine du repère $O$,
- l'angle $\theta$ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Oz). Cet angle est compris entre 0 et $\pi$, est est appelé « colatitude ».
- l'angle $\varphi$ correspond à l'angle, dans le plan (xOy), entre l'axe (Ox) et $\overrightarrow{OP}$ où $P$ est le projeté de $M$ dans le plan (xOy). Cet angle est compris entre 0 et $2\pi$, et est appelé « longitude ».

La base associée est $(\overrightarrow{u_r}\ , \overrightarrow{u_\theta}\ , \overrightarrow{u_\varphi})$ avec :

- $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire dirigé selon le rayon de $O$ vers $M$;
- $\overrightarrow{u_\theta}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ contenu dans le plan défini par l'axe (Oz) et $\overrightarrow{OM}$, orienté dans le sens des $\theta$ croissants ;
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ un vecteur unitaire complétant le trièdre de façon à ce que $(\overrightarrow{u_r}\ , \overrightarrow{u_\theta}\ , \overrightarrow{u_\varphi})$ soit un trièdre direct (cf. « règle de la main droite »).

Dans la base sphérique, le rayon vecteur est alors décrit simplement par : $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$.

# 6. Exercices type

## 6.1. Mouvement de la Lune autour de la Terre

On suppose que la Lune à un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique.

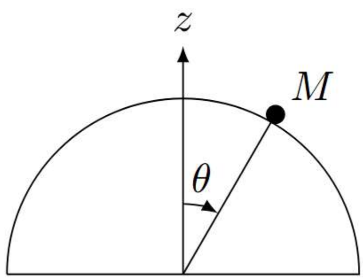
**Q1.** Déterminer l'accélération à laquelle est soumise la Lune dans le repère de Frenet.

**Q2.** Faire un bilan des forces sur la Lune puis appliquer le principe fondamental de la dynamique. En déduire la valeur de la masse de la Terre.

*<u>Données</u> :*

- Période de révolution de la Lune autour de la Terre : $\boldsymbol{T}$ = 27,32 jours.
- Rayon de l'orbite lunaire : $\boldsymbol{R_L}$ = 3,84.10⁵ km.

## 6.2. Glissade sur un igloo




On considère un enfant de masse $\boldsymbol{m}$ qui vient d'escalader un igloo de rayon $\boldsymbol{R}$. À $t$ = 0, il se laisse glisser sans vitesse initiale. On pourra modéliser l'enfant par un point $M$. On néglige à la fois les frottements solides sur la glace, mais aussi les frottements fluides de l'air. Le but est de trouver à quel moment l'enfant décolle de l'igloo.

**Q1.** Faire le bilan des forces auxquelles est soumis l'enfant. On ne manquera pas de faire un schéma.

**Q2.** Dans une base bien choisie pour l'étude, exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération de l'enfant.

**Q3.** Appliquer le principe fondamental de la dynamique et en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle $\theta$. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

**Q4.** En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}.(1-\cos(\theta))$.

**Q5.** En déduire l'expression de $R_N$, la force exercée par l'igloo sur l'enfant, en fonction de l'angle $\theta$.

**Q6.** Quelle condition sur $R_N(\theta)$ correspond à la condition de « décollage » ?

**Q7.** En déduire l'angle auquel l'enfant décolle de l'igloo.