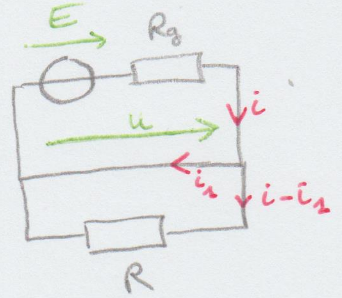
Electrocinétique : circuits et mesures.

1. Modélisation linéaire d'un circuit

Q1 :
- Branche avec générateur : $u(t) = e(t) - R_g \cdot i(t)$
- Branche avec bobine : $u(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$
- Branche avec résistance R : $u(t) = R \cdot (i(t) - i_1(t))$

Q2 :



En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil

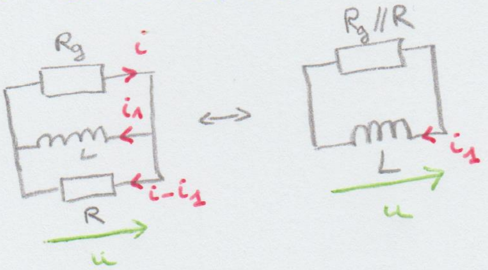
↳ $\boxed{u(t=0^-) = 0}$ ← valable pour $t<0$.

Pour la résistance R_g : $\boxed{i(0^-) = \frac{E}{R_g}}$

Pour la résistance R : $R.(i(0^-) - i_1(0^-)) = 0$

↳ $\boxed{i_1(0^-) = i(0^-) = \frac{E}{R_g}}$

Q3 : On a $e(t>0) = 0$



- bobine : $u(t) = L \cdot \frac{di_1}{dt}$
- $R_g // R$: $u(t) = -\frac{R_g . R}{R_g + R} \cdot i_1$

⚠ convention

$$u(t) = -\frac{L}{\frac{R_g . R}{R_g + R}} \frac{du(t)}{dt}$$

↓ forme canonique.

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = 0}$$

avec $\boxed{\tau = \frac{L}{\frac{R_g . R}{R_g + R}}}$

Q4 : Continuité du courant traversant la bobine :

$$i_1(0^-) = i_1(0^+) = \frac{E}{R_g}$$

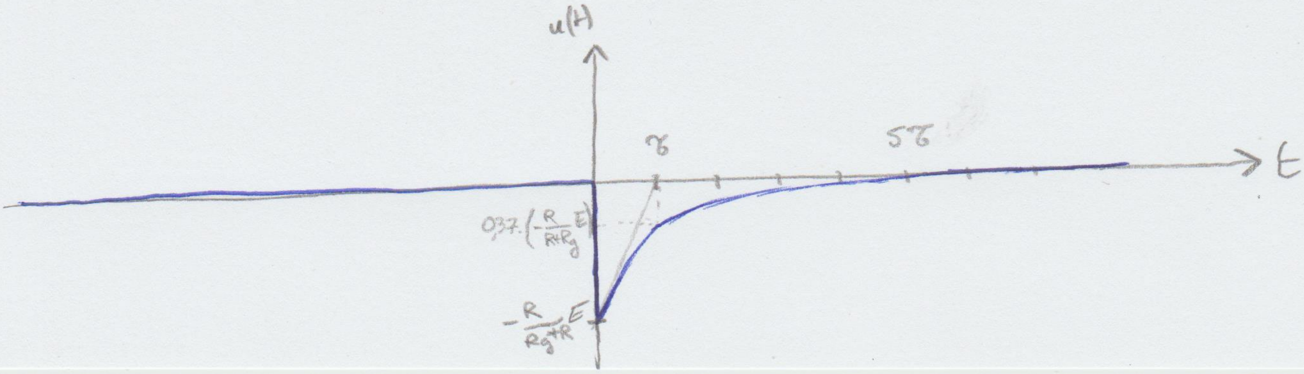
↳ $u(0^+) = -\frac{R_g . R}{R_g + R} \cdot i_1(0^+) \Rightarrow \boxed{u(0^+) = -\frac{R}{R_g + R} \times E}$

Q5 : Solution à l'équation différentielle :

$$u(t) = A . e^{-t/\tau} + \underbrace{u(\infty)}_{\substack{\text{solution particulière} \\ = 0 \text{ ici}}} = A . e^{-t/\tau}$$

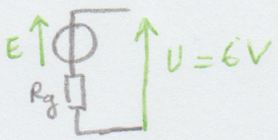
Condition initiale :

$$u(0^+) = A = -\frac{R}{R_g + R} E \implies \boxed{u(t) = -\frac{R}{R_g + R} . E . e^{-t/\tau}}$$



2. Générateur et oscilloscope

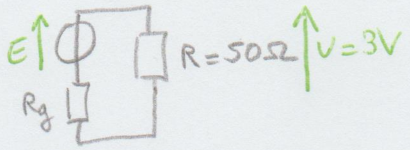
Q6 : mesure 1



circuit ouvert :

$$\boxed{E = U = 6V}$$

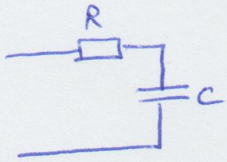
mesure 2



$$U = \frac{R}{R+R_g} \cdot E \Rightarrow \boxed{R_g = R \cdot \frac{E-U}{U}}$$

$\hookrightarrow$ AN : $R_g = R = \underline{50\Omega}$

Q7



$$Z_{RC} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\hookrightarrow |Z_{RC}| = \frac{\sqrt{(RC\omega)^2+1}}{C\omega}$$

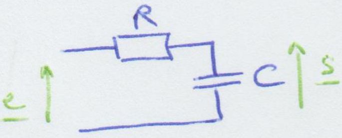
minimale pour $\omega \to \infty$

$$|Z_{RC}|_{min} = R.$$

Le générateur peut être considéré comme idéal si $R_g \ll |Z_{RC}|_{min}$

donc $\underline{R_g \ll R}$.

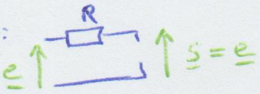
Q8 :



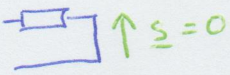
$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ en utilisant le pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

En BF :



En HF



c'est un passe-bas

Comparaisant à la forme canonique

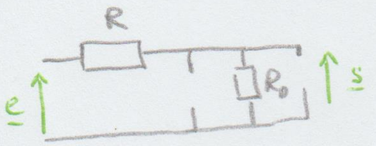
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \rightarrow H_0 = 1, \quad \boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

AN : $\omega_c = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$

$\downarrow$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \simeq \underline{1{,}5 \text{ kHz}}$$

Q9 : En basse fréquence :



Pont diviseur de tension :

$$\boxed{H_0 = \frac{R_0}{R+R_0}}$$

Q10 :

$$\boxed{\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R_0} + jC_0\omega = \frac{1}{R_0} + j(C_0+C)\omega}$$

A basse fréquence ($\omega \to 0$)

$$\underline{Y}_{BF} = \frac{1}{R_0}$$

Comme $\underline{s} = \frac{1}{\underline{Y}} \cdot \underline{i}$

$$\Delta\varphi = -\arg(\underline{Y}) \xrightarrow[BF]{} \boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Q11 : D'après le pont diviseur de tension :

$$\underline{H}' = \frac{\frac{1}{\underline{Y}}}{R + \frac{1}{\underline{Y}}} = \frac{1}{R\underline{Y} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0} + jR(C_0+C)\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H}' = \frac{\frac{R_0}{R+R_0}}{1 + j\frac{RR_0}{R+R_0}(C_0+C)\omega}} \longrightarrow \boxed{H_0 = \frac{R_0}{R+R_0}} \quad \boxed{\omega_c' = \frac{1}{\frac{RR_0}{R+R_0}(C_0+C)}}$$

OK Q9

Q12 : $R = 5\,k\Omega$, $R_0 = 1\,M\Omega$, $C = 20\,nF$, $C_0 = 25\,pF$

$R_0 \gg R \rightarrow H_0 \simeq 1$

$C_0 \ll C \rightarrow C_0 + C \simeq C \rightarrow \omega_c' \simeq \frac{1}{RC} = \omega_c$.

↳ L'oscilloscope permet ici de retrouver les caractéristiques du filtre RC : il ne perturbe quasiment pas ces mesures.

Q13 :

$$\underline{H}' = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c'}} \longrightarrow$$

Basses Fréquences : $\frac{\omega}{\omega_c'} \ll 1$: $\underline{H}'_{BF} = H_0$

$$\begin{cases} G_{dB,BF} = 20\log(H_0) \\ \Delta\varphi_{BF} = 0. \end{cases}$$

Hautes Fréquences : $\frac{\omega}{\omega_c'} \gg 1$: $\underline{H}'_{HF} = \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c'}} = -j\left(\frac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_c'}}\right)$

$$\begin{cases} G_{dB,HF} = 20\log(H_0) - \underbrace{20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c'}\right)}_{\text{pente}} \\ \Delta\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

A $\omega = \omega_c'$: $\underline{H}(\omega_c') = \frac{H_0}{1+j}$

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega_c') = 20\log(H_0) - 20\log(\sqrt{2}) \\ \qquad = 20\log(H_0) - 3\,dB \\ \Delta\varphi(\omega_c') = 0 - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) \\ \qquad = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

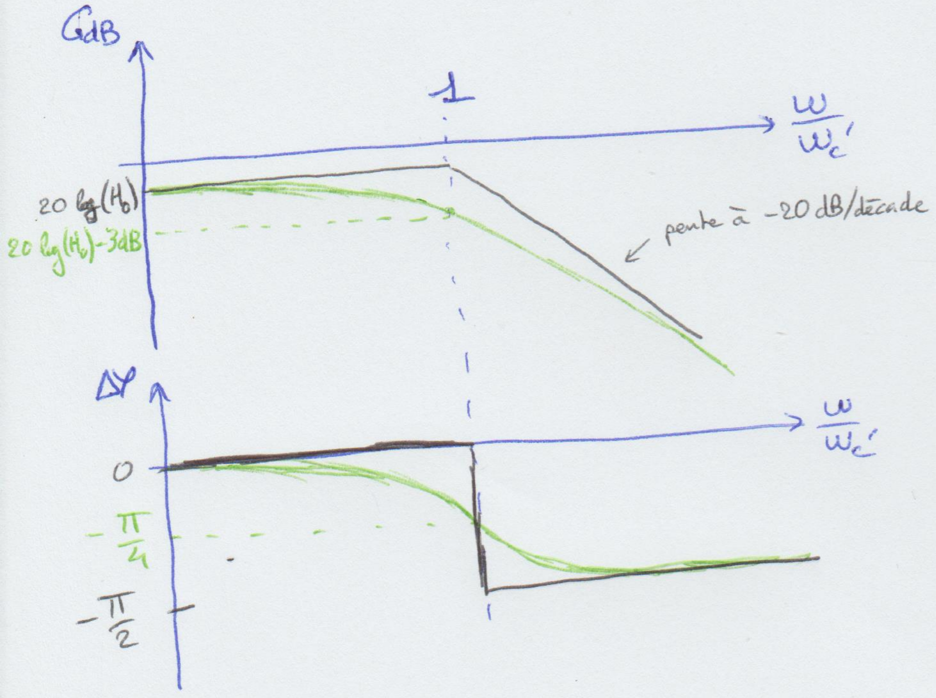


diagramme asymptotique.
diagramme réel