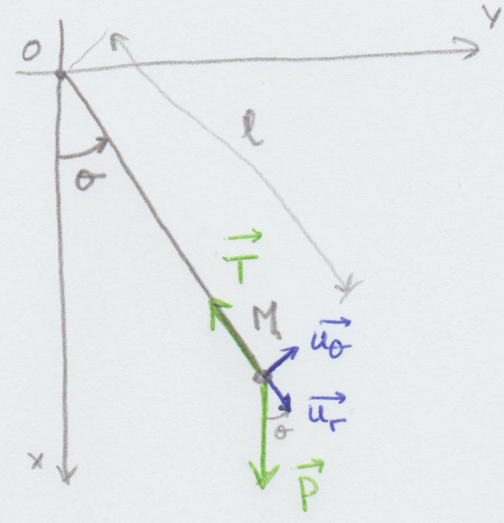
Exercice 3 : Le pendule simple.

Q1 :

* système : {point matériel M}
* référentiel : terrestre supposé galiléen

↳ repère : $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$



* bilan des Forces

· poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} m.g \cdot \cos(\theta) \\ -mg \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$

· tension du fil : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$

* 2ème loi de Newton (système fermé)

$$\sum \vec{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} mg \cdot \cos(\theta) \\ -mg \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell . \ddot{\theta} \end{pmatrix}}_{\text{accélération en base polaire !}}$$

En projetant sur $\vec{u_\theta}$ (pour se "débarasser" de T) :

$$-m.g. \sin(\theta) = m . \ell . \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0}$$

Q2 : Avec $\theta \simeq \sin(\theta)$

↳ $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ à comparer à la forme canonique pour un oscillateur harmonique

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 . \theta = 0$$

↳ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

Q3 : Solution de la forme :

$$\theta(t) = A . \cos(\omega_0 . t) + B . \sin(\omega_0 . t)$$

A $t=0$:

$\theta(0) = \theta_0 \longrightarrow A . \cos(0) + \cancel{B . \sin(0)} = \theta_0 \Rightarrow \boxed{A = \theta_0}$

$v(0) = \ell . \dot{\theta}(0) = 0 \longrightarrow \cancel{-A\omega_0 \sin(0)} + B\omega_0 \cos(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

↳ $\boxed{\theta(t) = \theta_0 . \cos(\omega_0 . t)}$

Q4 : On lache la masse d'un angle θ_0 en déclenchant le chronomètre.
On compte 10 aller-retours et on mesure sur le chronomètre la durée Δt de ces 10 allers-retours.

↳ $\boxed{T = \frac{\Delta t}{10}}$

Q5 On reprend la question 1 en ajoutant la force de Frottements.

$\vec{f} = -\alpha.\vec{v}$ avec $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta} \rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha.v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha.l.\dot{\theta} \end{pmatrix}$

2ème loi de Newton :

$$\begin{pmatrix} mg.\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha.l.\dot{\theta} \end{pmatrix} = m.\begin{pmatrix} -l\dot{\theta}^2 \\ l\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

Sur $\vec{u_\theta}$: $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

+ approx. des petits angles $\longrightarrow$ $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$ $\rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{g}{l} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \end{cases}$

donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

$\boxed{Q = \frac{\omega_0.m}{\alpha} = \frac{m}{\alpha}.\sqrt{\frac{g}{l}}}$

facteur de qualité : plus il est grand et plus on se rapproche d'un oscillateur harmonique.

Q6 : Pour résoudre : équation caractéristique

$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$

Régime pseudo périodique si $\Delta < 0 \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}}$

La solution est alors de la forme :

$$\theta(t) = e^{-\lambda.t}.\left[A\cos(\omega_p.t) + B\sin(\omega_p.t)\right]$$

Q7 $r_{1,2} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\lambda} \pm j\underbrace{\omega_0.\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}_{\omega_p} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$

$\boxed{\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

et $\boxed{T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}}$ (définition)

Q8 : $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T_p)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t-\lambda T_p}}\right) = \lambda.T_p = \frac{\omega_0}{\omega_p} \times \frac{\pi}{Q}$ si $Q \gg 1 \rightarrow \omega_0 \simeq \omega_p$ et $\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}}$

Q9 : $\begin{cases} T_p = t_C - t_B = 1{,}1\,s \\ Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_C}\right)} = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{8{,}81}{8{,}02}\right)} \simeq \frac{\pi}{\ln(1{,}1)} \simeq 31 \end{cases}$