

Devoir Libre de Physique- Chimie n°4

Méthode : Comment chercher un D.L. ?

- Commencer à chercher le DL le plus tôt possible. Ne pas essayer de tout faire en une fois : étaler votre travail sur la semaine.
- Chercher avec le chapitre et les exercices du TD ouverts sous les yeux.
- Chercher en **groupe**.
- En cas de blocage, poser des questions, à la fin d'un cours ou par mail : yann.apertet@gmail.com
- La réponse à un problème de physique doit contenir :
 - des schémas grands, clairs et complets ;
 - des phrases qui expliquent votre raisonnement ;
 - les **calculs littéraux**, avec uniquement les grandeurs littérales définies par l'énoncé (ou par vous-même si elles ne le sont pas par l'énoncé) ;
 - les applications numériques avec un nombre adapté de chiffres significatifs et une unité.

Après avoir récupéré votre copie et le corrigé :

- **Reprendre** votre copie avec le corrigé afin de comprendre vos erreurs, **lire les conseils donnés**, . . .
- Refaire le DL (si besoin) avant le DS suivant.

Exercice 1 : Saut à l'élastique (d'après Bac 2011 et 2021)

Le saut à l'élastique est un loisir qui permet de ressentir des sensations fortes. Il consiste à sauter dans le « vide » à l'aide d'un élastique attaché aux chevilles. Ce saut peut se faire à partir d'un pont.



Source : www.istockphoto.com

Un saut en élastique se déroule en plusieurs phases qui sont décrites ci-dessous :

1 ^{re} phase	2 ^e phase	3 ^e phase
		
Chute libre, l'élastique n'est pas tendu.	L'élastique commence à se tendre, le sauteur ralentit. Lorsque l'élastique est complètement étiré, le sauteur s'arrête.	L'élastique se contracte, le sauteur remonte en reprenant de la vitesse puis en ralentissant à nouveau.

Ces trois phases se répètent jusqu'à ce que le sauteur soit immobile, la durée totale du saut est de l'ordre d'une minute.

PARTIE A – On néglige les frottements !

1. Première phase du saut à l'élastique : Un peu d'adrénaline...

Considérons la première phase d'un saut à l'élastique, lorsqu'un sauteur et son équipement, de masse $m = 80,0$ kg, se laisse tomber sans vitesse initiale d'un pont dont le plateau se trouve à une hauteur $H = 50$ m du sol.

On peut considérer que le volume du sauteur et de son équipement est : $V = 0,25$ m³.

Pour simplifier, on suppose que le mouvement est vertical. On assimile l'élastique à un ressort de raideur k .

Données : Masse volumique de l'air : $\rho = 1,3$ kg.m⁻³
 Accélération de la pesanteur : $g = 9,8$ m.s⁻²
 Longueur à vide du ressort : $\ell_0 = 8$ m
 Constante de raideur du ressort : $k = 41,0$ N.m⁻¹

Q1. Montrer qu'il est légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède, en comparant sa valeur à celle du poids du système S, constitué par le sauteur et son équipement. **On négligera donc cette poussée dans tout ce qui suit.**

Q2. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du sauteur, assimilé à son centre de gravité noté S, dans le repère (Ox ; Oz). On prendra $z = 0$ pour le sol et l'axe Oz est orienté vers le haut.

Q3. Établir que l'équation horaire du mouvement selon l'axe Oz s'écrit :

$$z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + H$$

Après traitement de la vidéo d'un saut à l'aide d'un logiciel de pointage et modélisation des résultats, on obtient l'équation horaire suivante :

$$z(t) = -4,90 \cdot t^2 + 49.8$$

avec z exprimé en m et t exprimé en s.

Q4. La modélisation des résultats expérimentaux est-elle cohérente avec l'expression donnée à la question précédente ? Justifier.

Q5. Calculer la date à laquelle l'élastique commence à se tendre.

Q6. En déduire la valeur de la vitesse atteinte à cet instant.

Q7. Retrouver la valeur de la vitesse atteinte lorsque l'élastique commence à se tendre grâce à une approche énergétique.

2. Deuxième phase du saut à l'élastique : la tension est à son comble...

Q8. A l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal $\Delta\ell$ de l'élastique.

Pour un maximum de sensations fortes, on aimerait que le sauteur puisse venir toucher l'eau de la rivière située sous le pont.

Q9. Le saut est-il réussi ?

Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants.

Q10. Donner l'expression de la force maximale F_{max} exercée par l'élastique sur le sauteur. Le saut est-il dangereux de ce point de vue ?

PARTIE B – Les frottements ne sont plus négligés !

1. Première phase du saut à l'élastique : Toujours de l'adrénaline...

On reprend le problème mais en prenant en compte cette fois les frottements. L'ensemble des actions exercées par l'air, outre la poussée d'Archimède, sur le sauteur peut être modélisé par une force de frottement dont la valeur f est proportionnelle au carré de la vitesse acquise : $f = \mu \cdot v^2$ où $\mu = 0,78$ unité SI.

Q11. À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité avec laquelle s'exprime la constante μ , dans le Système International.

Q12. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v_z(t)$ au cours de la chute (avant que l'élastique ne se tende) et vérifier qu'elle est de la forme :

$$\frac{dv_z(t)}{dt} + B \cdot v_z^2(t) = A$$

où A et B sont deux constantes.

Q13. Avec quelles unités s'expriment A et B ? Déterminer A et B en fonction des données et vérifier que $B = 9,8 \cdot 10^{-3}$ unité SI.

Q14. En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} (en fonction de m , g et μ) puis calculer sa valeur.

La résolution de l'équation différentielle établie précédemment est obtenue par la méthode numérique d'Euler. Un extrait du script python utilisé est donné ci-dessous :

<pre>### PARAMETRES ### g = 9.8 # intensite de la pesanteur m = 80 # masse en kg mu = 0.78 # coefficient de frottement ### Conditions initiales ### v0 = 0 # vitesse initiale ### Paramètres de simulation ### dt = 0.10 fin = 10 nb_iterations = int(fin/dt)</pre>	<pre>### Méthode d'Euler ### liste_t = [0] liste_v = [v0] for i in range(nb_iterations-1): t = liste_t[i] v = liste_v[i] t_suivant = <i>Ligne à compléter</i> v_suivant = <i>Ligne à compléter</i> liste_t.append(t_suivant) liste_v.append(v_suivant)</pre>
--	---

Q15. Quel est le pas de simulation Δt utilisé pour effectuer les calculs de $v_z(t)$? La valeur choisie est-elle judicieuse ? Justifier.

Q16. Compléter les deux lignes incomplètes dans le script. Les noter sur votre copie.

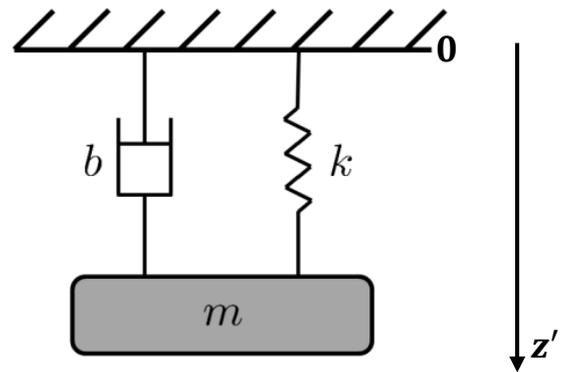
L'application de la méthode d'Euler donne une valeur de vitesse de $12,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ au moment où l'élastique se tend.

Q17. En déduire le travail des forces de frottements lors de la première phase du saut.

2. Troisième phase du saut à l'élastique : des oscillations...

Dans la troisième phase du mouvement, le sauteur est toujours modélisé par un point matériel soumis à la force de rappel de l'élastique de constante de raideur k .

La dissipation de l'énergie dans le ressort est prépondérante sur la dissipation due aux frottements de l'air (on néglige donc ceux-ci) : on modélise l'énergie dissipée dans le ressort par une force de frottement de la forme $\vec{f}_d = -b \cdot \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse du sauteur.



Pour simplifier la description on change de repère : on fixe l'origine au point d'attache du ressort et on prend un axe Oz' orienté vers le bas.

Q18. Déterminer la position d'équilibre z'_{eq} du sauteur à la fin de son saut en fonction de m , g , k et ℓ_0 .

On pose $Z(t) = z'(t) - z'_{eq}$.

Q19. Montrer que l'équation différentielle gouvernant $Z(t)$ pour $t > 0$ ($t = 0$ correspondant au début de la troisième phase du saut) peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 \cdot Z = 0$$

et exprimer les constantes ω_0 et Q .

Le sauteur oscille verticalement en effectuant 4 « allers et retours » avant de se stabiliser.

Q20. Comment qualifie-t-on de telles oscillations ? Que peut-on dire du facteur de qualité Q ?

Q21. Quelle est l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres ?

Les conditions initiales sont $Z(t = 0) = Z_0$ et $v(0) = 0$.

Q22. Donner l'allure de la courbe $Z = f(t)$.

Q23. Montrer que l'expression de $Z(t)$, solution de l'équation différentielle, se met sous la forme :

$$Z(t) = e^{-\lambda t} \cdot (A \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B \cdot \sin(\Omega \cdot t))$$

Exprimer Ω , λ , A et B en fonction de Q , ω_0 et Z_0 .

Q24. Estimer l'ordre de grandeur du facteur de qualité Q . En déduire la valeur de b . Préciser l'unité de ce coefficient.

Q25. Estimer la durée de la phase trois.

Exercice 2 : Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

La France produit l'essentiel de son électricité — environ 75% — à partir de centrales électriques nucléaires. Ces centrales utilisent comme source d'énergie un « combustible » constitué d'oxyde d'uranium enrichi en uranium 235, seul isotope fissile, afin d'atteindre une teneur de l'ordre de 4%. Avant utilisation dans une centrale, le minerai doit donc d'abord être traité afin de produire ce combustible.

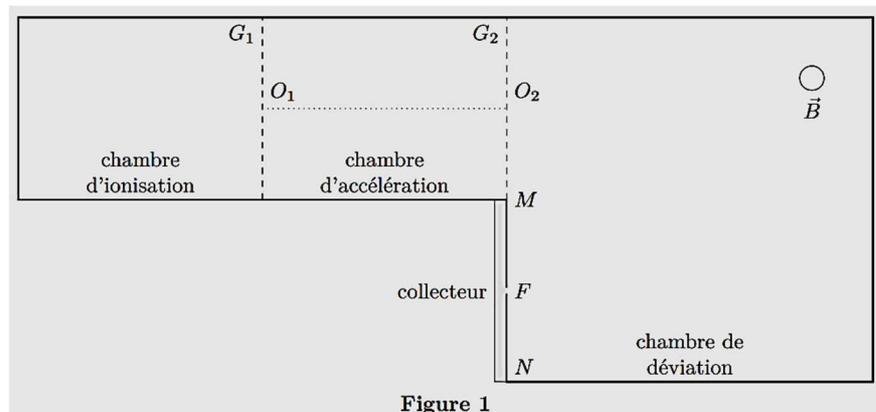
Les deux principaux isotopes de l'uranium sont $^{235}_{92}\text{U}$ et $^{238}_{92}\text{U}$ de masses molaires respectives $235,0439 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $238,0508 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en $^{235}_{92}\text{U}$ de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employée pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons.

Un Calutron est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties (cf. figure 1) :

- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium $^{235}_{92}\text{U}$ et $^{238}_{92}\text{U}$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+ .

On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle ;



- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 ;
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme \vec{B} de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions est disposé entre M et N . Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

Données : charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
masse du proton \approx masse du neutron : $m_p = m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

A – Accélération des ions

- Quel doit être le signe de la différence de potentiel $U = V_{G_1} - V_{G_2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?
- Établir les expressions des vitesses v_1 et v_2 respectivement des ions $^{235}_{92}\text{U}^+$ et $^{238}_{92}\text{U}^+$ lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1 , m_2 , e et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.
- L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de $15,0 \text{ keV}$; en déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles. Déterminer numériquement les vitesses v_1 et v_2 en respectant les chiffres significatifs.

B – Déviation des ions

- Q4.** Quel doit être le sens du champ magnétique \vec{B} régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
- Q5.** En supposant que la trajectoire d'un faisceau homocinétique (même vitesse pour tous les ions du faisceau) d'ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ est circulaire dans la zone où règne le champ magnétique, exprimer leur rayon de courbure R_1 en fonction de m_1 , e , U et $B = \|\vec{B}\|$. Faire de même pour un faisceau homocinétique d'ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$; on notera R_2 leur rayon de courbure.
- Q6.** Le collecteur du Calutron consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' qui permet de recueillir les isotopes 235. Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le calutron sachant que F est placé à $D = 940$ mm de O_2 .
- Q7.** Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de $L' = 4,0$ mm dans le plan de la figure. Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?
- Q8.** L'intensité du faisceau utilisé dans un Calutron est de 100 mA. La source est alimentée en uranium contenant 0,7% de ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ et 99,3% de ${}^{238}_{92}\text{U}^+$. Quelle quantité de l'isotope 235 le Calutron peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

Exercice 3 : Des toboggans sous contrôle (plus dur)

(d'après Centrale-Supélec TSI2018)

Les toboggans font aujourd'hui parti des incontournables d'un centre aquatique. De nombreux toboggans présentent des enroulements plus ou moins complexes.

On étudie le toboggan présenté sur la photo ci-dessous et composé d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement $n = 2,3$ tours. Le rayon moyen est estimé à $R = 2,0$ m et la hauteur de l'ensemble est $h = 4,0$ m. On néglige les frottements.

On prendra $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



On note $\theta > 0$ la position angulaire du baigneur dans le toboggan relativement à la position de départ, d'altitude $z_0 = 0$. Le baigneur suit la trajectoire d'équation $r = R$, $z = \alpha \cdot \theta$, l'axe ($z'z$) étant orienté selon la verticale descendante.

- Q1.** Déterminer la valeur de α .
- Q2.** Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.

Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les t_f secondes. On impose une marge de $t_m = 5$ s en plus de la durée de parcours dans le toboggan.

- Q3.** Calculer t_f .