Exercice : Toboggan aquatique

1. Etude d'un toboggan rectiligne

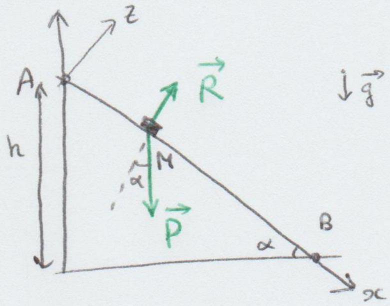
Q1 :
* système : {passager}
* référentiel : terrestre supposé galiléen → repère : $(A, \vec{u_x}, \vec{u_z})$
* bilan des forces extérieures

Force conservative → • poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} m.g.\sin(\alpha) \\ -m.g.\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

• réaction du support (normale au support)

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$$

↑ force qui ne travaille pas.



* Théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}(\vec{f}_{\text{non conservatives}}) = 0$$

$$(E_c(B) + E_{pp}(B)) - (E_c(A) + E_{pp}(A)) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}m.v_B^2 + 0\right) - (0 + m.g.h) = 0 \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2.g.h}}$$

AN $v_B = 2{,}5 \times 10^{1}\ m.s^{-1} = 92\ km.h^{-1}$

Q2 : Ce résultat est indépendant de la forme du toboggan.

Q3 : Maintenant la réaction du support possède une composante tangentielle :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -T \\ N \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas de mouvement selon l'axe z : d'après le principe d'inertie les forces se compensent selon cet axe :

$$N + (-m.g.\cos(\alpha)) = 0 \Rightarrow \boxed{N = m.g.\cos(\alpha)}$$

Q4

$$W_{AB}(\vec{R}) = \vec{AB}.\vec{R} = \begin{pmatrix} AB \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -T \\ N \end{pmatrix} = -AB.T \Rightarrow \boxed{W_{AB}(\vec{R}) = -AB.T}$$

$$\text{or} \begin{cases} T = \mu.N = \mu.m.g.\cos(\alpha) \\ \frac{h}{AB} = \sin(\alpha) \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin(\alpha)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{W_{AB}(\vec{R}) = -\frac{\mu.m.g.h}{\tan(\alpha)}}$$

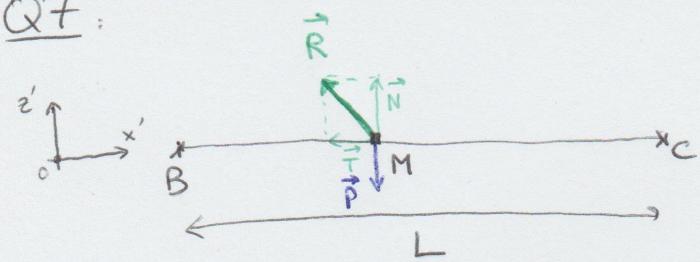
Q5 : Théorème de l'énergie mécanique : $E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{R})$

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 - m.g.h = -\frac{\mu.m.gh}{\tan(\alpha)}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{2.g.h\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\alpha)}\right)}}$$

Q6 : $v_{B\,max} = 80\ km.h^{-1} \Rightarrow \mu_{min} = 0{,}24$ (lecture graphique).

Q7 : On veut $v(C) = 0$ avec $\alpha = 0{,}24$



* D'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(C) - E_m(B) = W_{BC}(\vec{R}) = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -T \\ N \end{pmatrix}$$

$$0 - \frac{1}{2} m . V_B^2 = -T \times L = -\mu . N . L \quad (1)$$

* Pas de mouvement sur z' :
principe d'inertie → les forces se compensent

$$\vec{P} + \vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{N = mg} \quad (2)$$

(1) et (2) : $\frac{1}{2} V_B^2 = \mu . g . L \Rightarrow \boxed{L = \frac{V_B^2}{2\mu . g}}$

AN : $L = \frac{\left(\frac{80}{3,6}\right)^2}{2 . 0{,}24 . 9{,}81} = \underline{1{,}0 \times 10^2 \, m}$

2. Etude d'un virage

Q8 : Un référentiel est l'association d'un repère d'espace (origine + base) et d'un repère temporel.

Q9 : Dans la base polaire : $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

$$\boxed{\vec{OM} = r . \vec{u_r}}$$

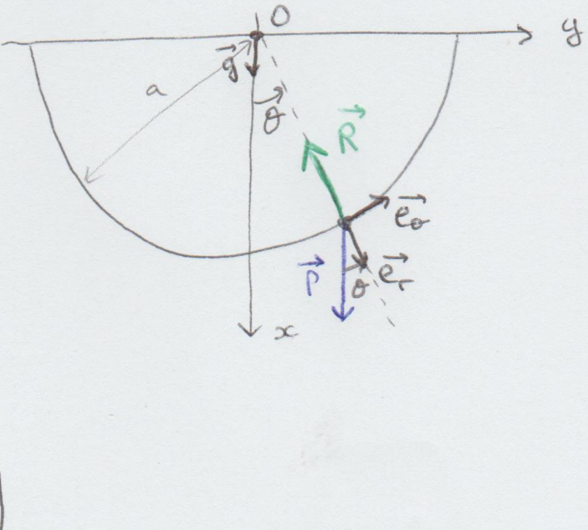
$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} . \vec{u_r} + r . \dot{\theta} \vec{u_\theta}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{r} \vec{u_r} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u_\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u_\theta} + r . \ddot{\theta} \vec{u_\theta} - r . \dot{\theta}^2 \vec{u_r}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r . \dot{\theta}^2) \vec{u_r} + (2\dot{r} . \dot{\theta} + r . \ddot{\theta}) \vec{u_\theta}}$$

Q10 :

* système : { point M }
* référentiel : terrestre supposé galiléen (repère $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$)
* bilan des forces :
  - poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} mg . \cos(\theta) \\ -m.g . \sin(\theta) \end{pmatrix}$
  - réaction normale du support $\vec{R} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}$



⚠ notation : distinguer accélération et rayon a

* 2ème loi de Newton (système fermé) :

$$m . \vec{a_{cc}} = \vec{P} + \vec{R}$$

projection sur $\vec{e_\theta}$:

$$m . a . \ddot{\theta} = -m . g . \sin(\theta) + 0$$

Q9 avec r = a = constante

$$\hookrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin(\theta) = 0}$$

Q11 : si $\theta \ll 1$ alors $\sin(\theta) \simeq \theta$ et $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a} . \theta = 0}$

en pratique : ($\theta < 20°$)

équation caractéristique d'un oscillateur harmonique avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}}$

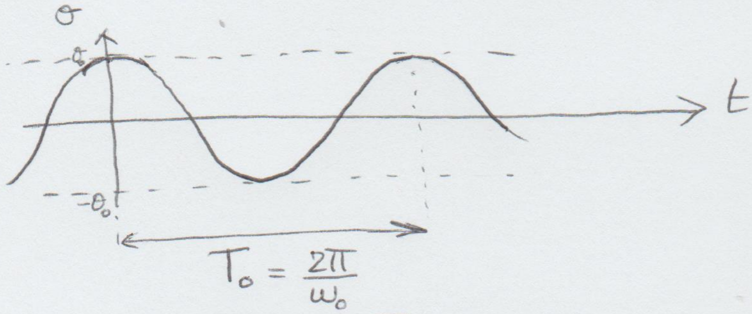
Q12 : $\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0$ on pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}}$

solution de la forme : $\theta(t) = A.\cos(\omega_0.t) + B.\sin(\omega_0.t)$

- $\theta(0) = \boxed{\theta_0 = A}$
- $\dot{\theta}(0) = 0 = B.\omega_0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

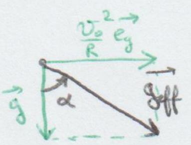
$$\hookrightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0.\cos(\omega_0.t)}$$

Q13 :



Q14 : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi.\sqrt{\frac{a}{g}}}$

Q15 : Somme des forces extérieures : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g} + \frac{m.v_0^2}{R_0}\vec{e_y} + \vec{N}$



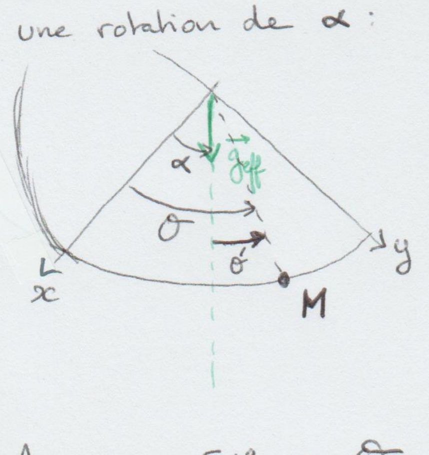
$$= m.\left(\vec{g} + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e_y}\right) + \vec{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g_{eff}} = \vec{g} + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e_y}}$$

$$\boxed{\|\vec{g_{eff}}\| = \sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R_0}\right)^2}}$$

Q16 D'après le schéma ci-dessus : $\boxed{\tan(\alpha) = \frac{v_0^2}{R_0.g}}$

Q17 : On se retrouve dans la situation de la question Q10 mais avec une rotation de α :



En posant $\theta' = \theta - \alpha$

on a alors $\ddot{\theta}' + \frac{g_{eff}}{a}\theta' = 0$

Conditions initiales

$\left.\begin{array}{l} \theta = 0 \Rightarrow \theta' = -\alpha \\ \dot{\theta}' = 0 \end{array}\right\} \overset{Q12}{\Rightarrow} \boxed{\theta'(t) = -\alpha.\cos\left(\sqrt{\frac{g_{eff}}{a}}.t\right)}$

θ' oscille entre $-\alpha$ et $+\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\theta \text{ osille entre } 0 \text{ et } 2\alpha}$

Q18 : Avec $\alpha = 51° \Rightarrow \theta_{max} = 2\alpha = 102° > 90°$

$\hookrightarrow$ le passager est éjecté !

$\hookrightarrow$ la gouttière est mal dimensionnée