# Etude des icebergs

# La partie émergée de l'iceberg

Un iceberg flotte en mer. On considèrera que l'eau salée possède la même masse volumique que l'eau douce. On veut trouver le volume émergé d'un iceberg.

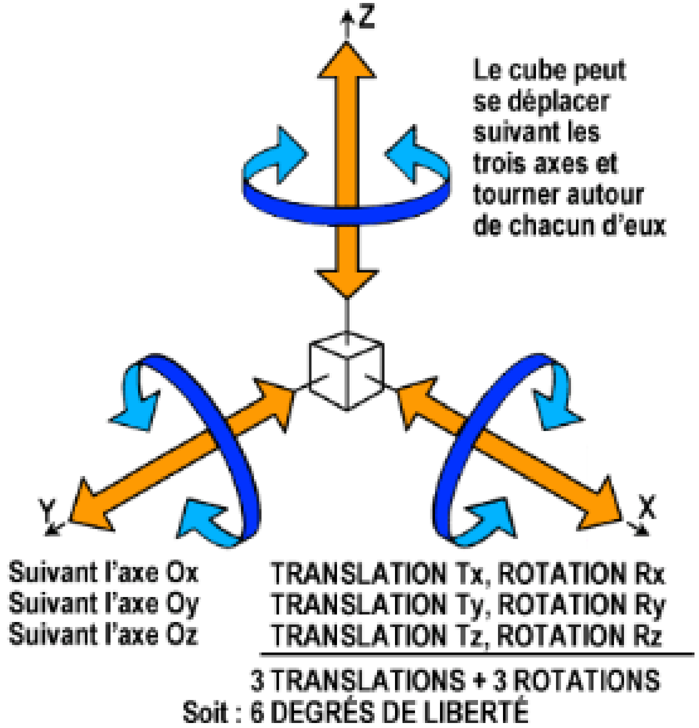
- Le volume de l'iceberg est de 170 $m^3$ . Sachant que la masse volumique de la glace est de 900 $kg.m^{-3}$ , quelle est la masse de cet iceberg ?
- Déterminer la fraction de l'iceberg qui est émergée.
- Dessiner cet iceberg : https://joshdata.me/iceberger.html

# Etude des solides (majoritairement en rotation)

# Un solide c'est quoi ?

**Définition : Solide**

Un ***solide*** (sous-entendu : ***indéformable***) est un système de points matériels dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

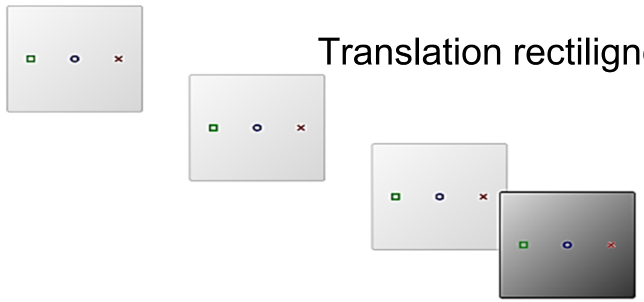


# Quand le solide bouge

**Définition : Mouvement de translation**

Un solide est en ***mouvement de translation*** si son orientation est fixe au cours du mouvement. On peut formuler ceci de trois façons équivalentes :

- Pour tous points $A$ et $B$ du solide, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ reste constant au cours du mouvement.
- Au cours du mouvement, les trajectoires de chacun de points du solide sont les mêmes mais décalées les unes par rapport aux autres.
- À chaque instant, quels que soient les points $A$ et $B$ du solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$.



Translation rectiligne

Translation curviligne

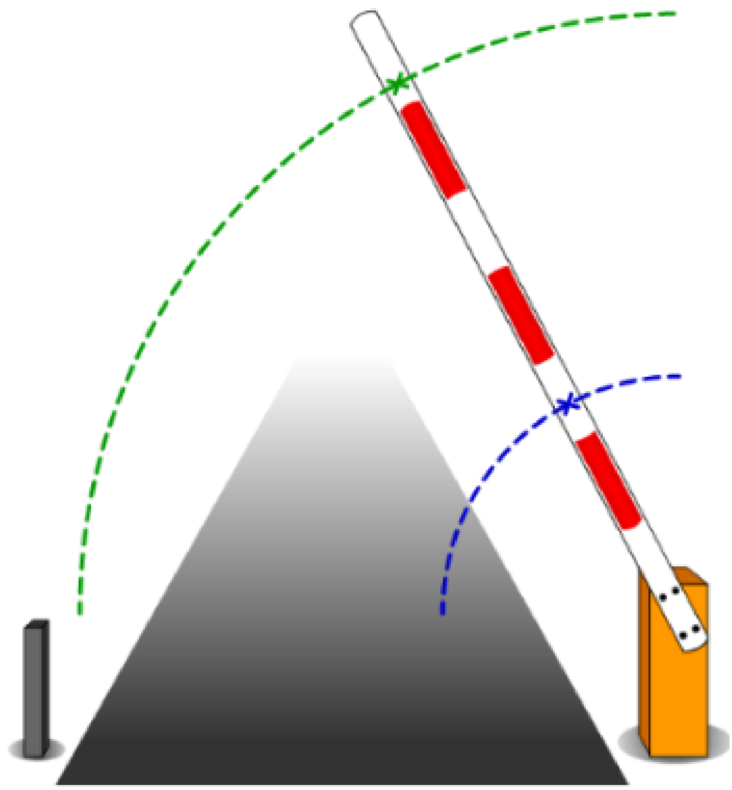
# Quand le solide bouge

**Définition : Mouvement de rotation autour d'un axe fixe**

Soit $\Delta$ un axe fixe.

Un solide est en rotation autour de $\Delta$ si la trajectoire de chacun de ses points est un ***cercle dont le centre est sur l'axe***.

De façon équivalente : la distance entre un point du solide et l'axe $\Delta$ reste constante au cours du temps.



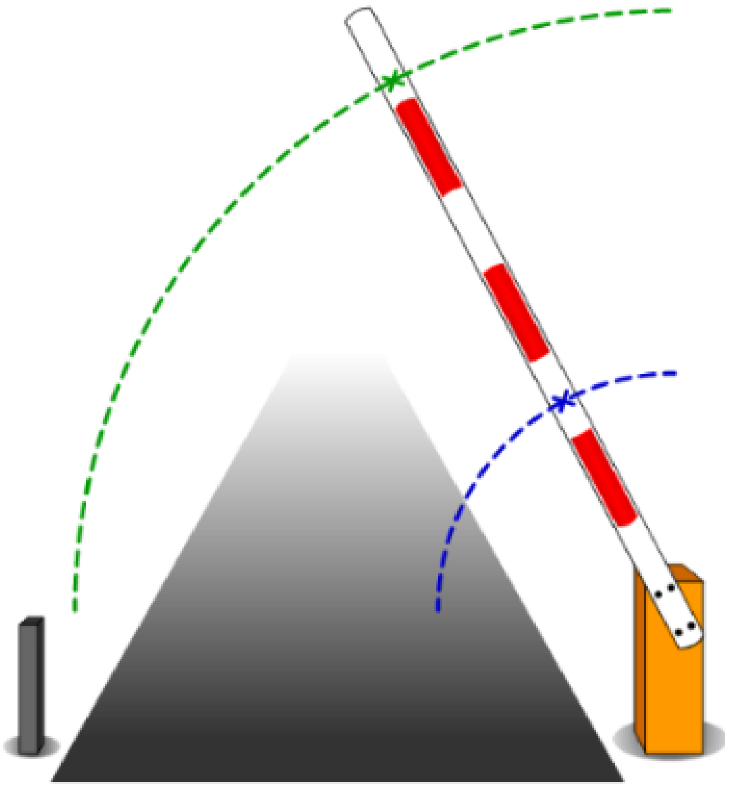
# Quand le solide bouge

**Propriété : Lien entre vitesse angulaire et vitesse d'un point du solide**

- On appelle vitesse angulaire le paramètre $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$.
- Pour une rotation autour d'un axe fixe, la vitesse angulaire ne dépend pas du point $M$ du solide considéré. On peut parler de LA vitesse angulaire du solide.
- Le vecteur vitesse d'un point $M$ du solide est tangent au cercle décrit par $M$, de norme

$$v(M) = r.|\omega|$$

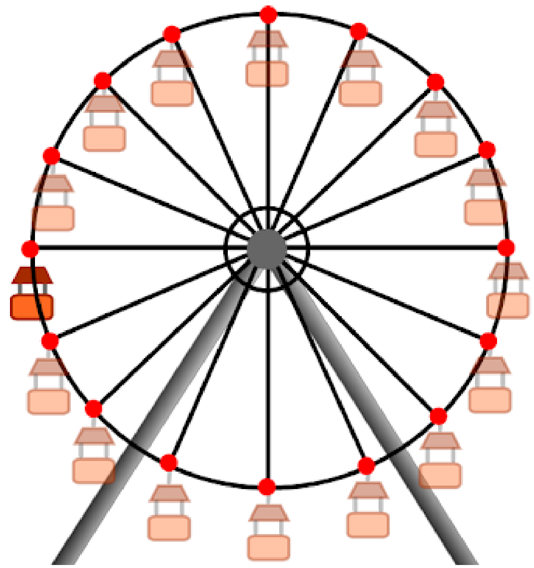
avec $r$ la distance à l'axe.



# *Savoir-faire 1 - Reconnaître et décrire une translation*

La grande roue a été inventée par l'ingénieur G. Ferris lors de l'exposition universelle de Chicago en 1893 pour rivaliser avec la Tour Eiffel construite lors de l'exposition universelle de 1889 à Paris. La grande roue de 1893 contenait 36 nacelles de 60 places chacune. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol.

1. Décrire le mouvement d'une nacelle.
2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(O')/\mathcal{R}$ du point d'attache $O'$ de la nacelle en fonction du rayon de la grande roue $R$ et de sa vitesse de rotation $\omega$.
3. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(P)/\mathcal{R}$ des pieds d'une personne assise dans la nacelle en fonction du rayon de la grande roue $R$ et de sa vitesse de rotation $\omega$.



# 2. Boite à outils pour les mouvements de rotation

# Moment d'une force

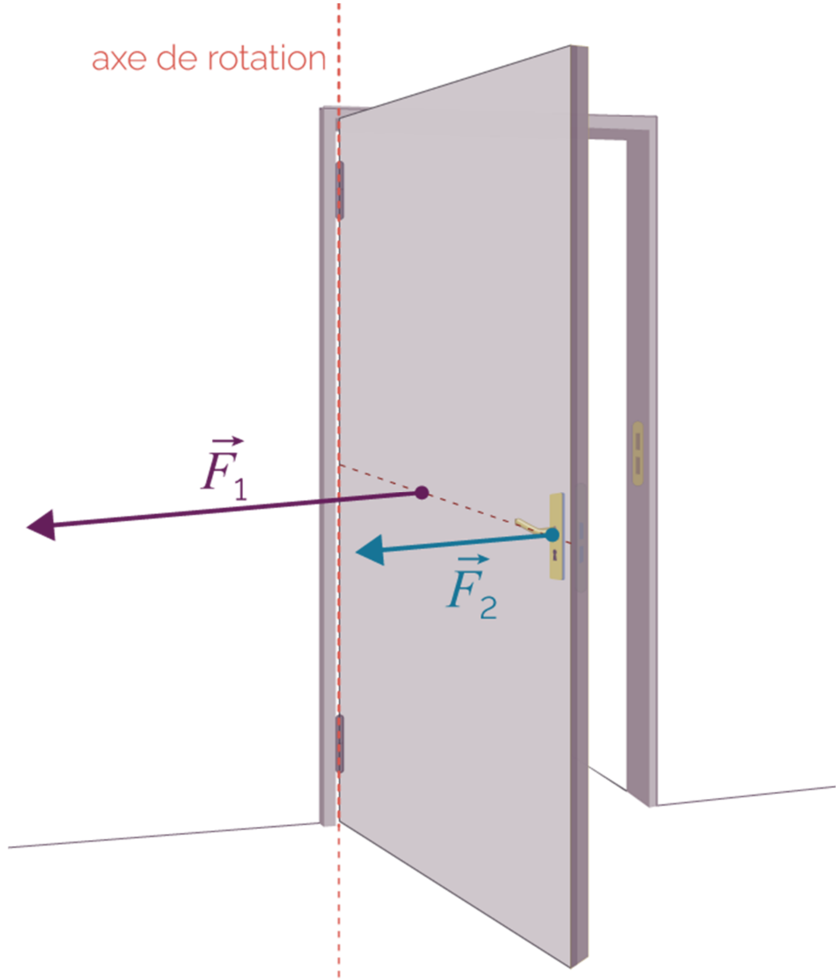
**Définition : Moment vectoriel d'une force en un point**

Le ***moment vectoriel*** de la force $\vec{F}$ appliquée en $M$, exprimé/calculé au point O est le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ définit par le produit vectoriel de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$ :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

La norme de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ s'exprime en newton-mètre (N.m).

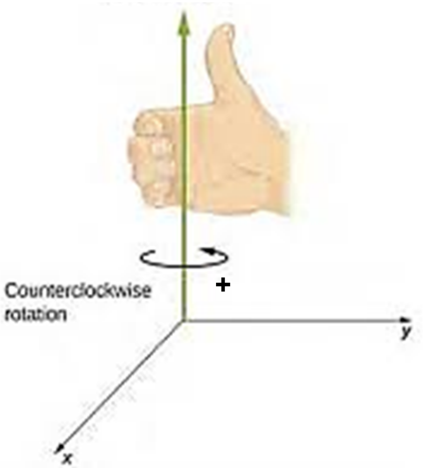
# Moment d'une force par rapport à un axe

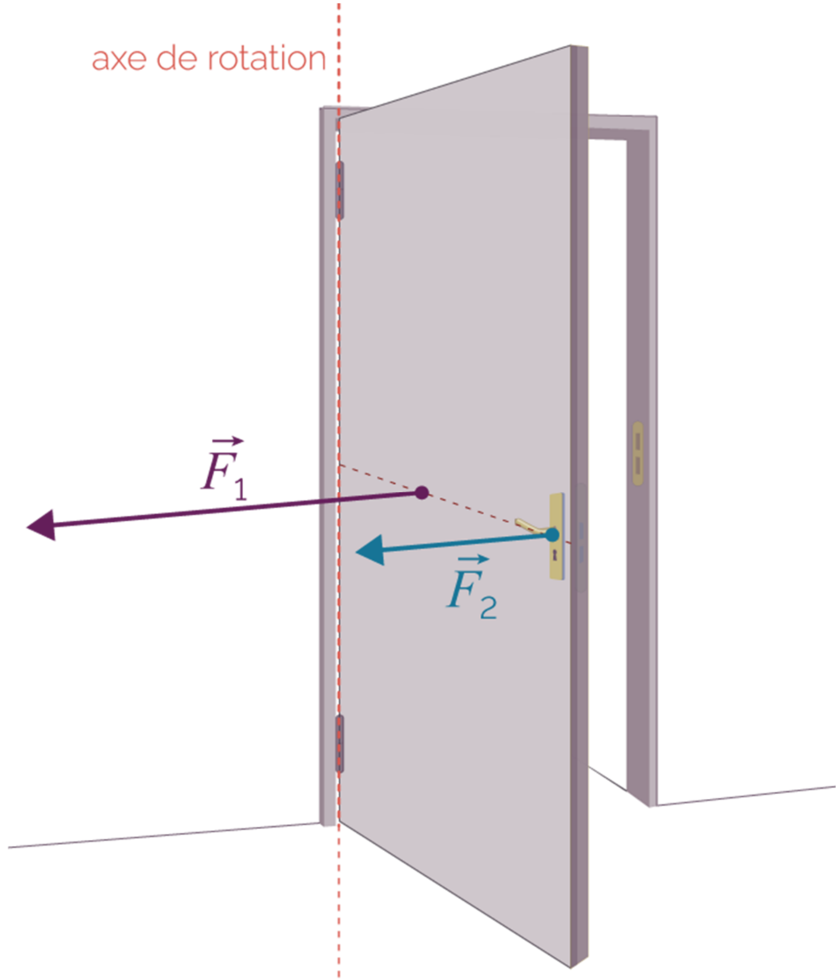


# Moment d'une force par rapport à un axe

**Convention : Axe orienté**

Un axe $\Delta$ est dit ***orienté*** lorsqu'il est dirigé par un vecteur $\vec{u}_\Delta$. Ce dernier définit le sens positif pour les plans qui lui sont orthogonaux (***règle de la main droite***).



# Moment d'une force par rapport à un axe

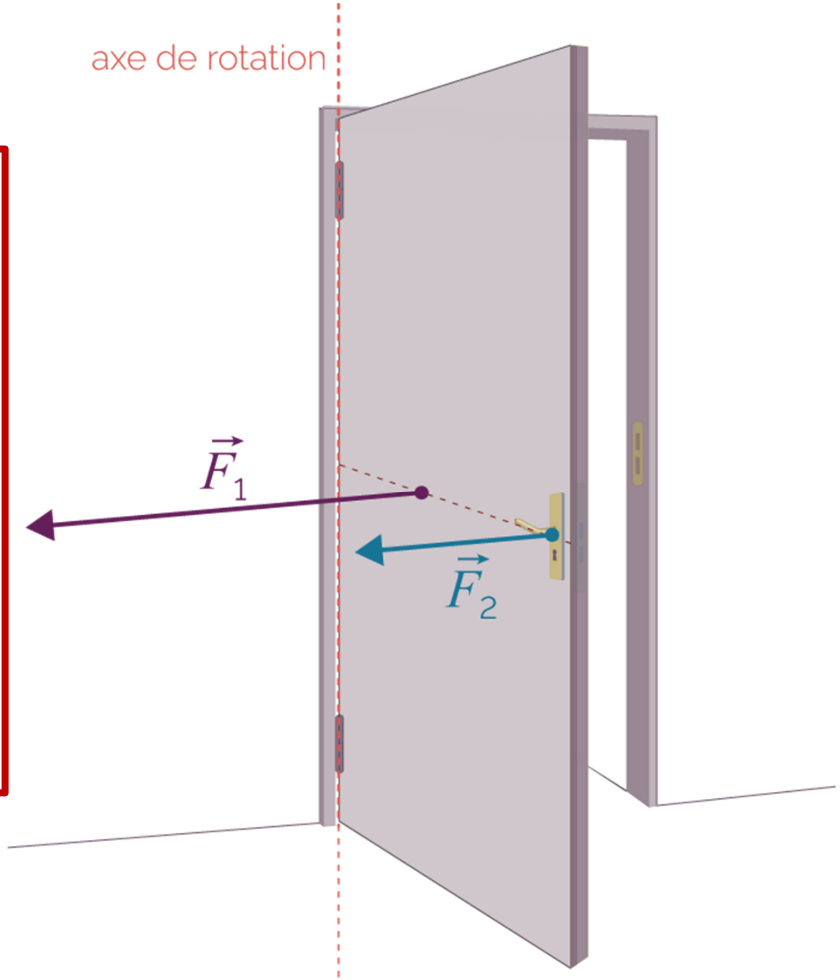
**Définition : Moment d'une force par rapport à un axe**

Soit un axe $\Delta$ orienté par un vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ et passant par le point O.

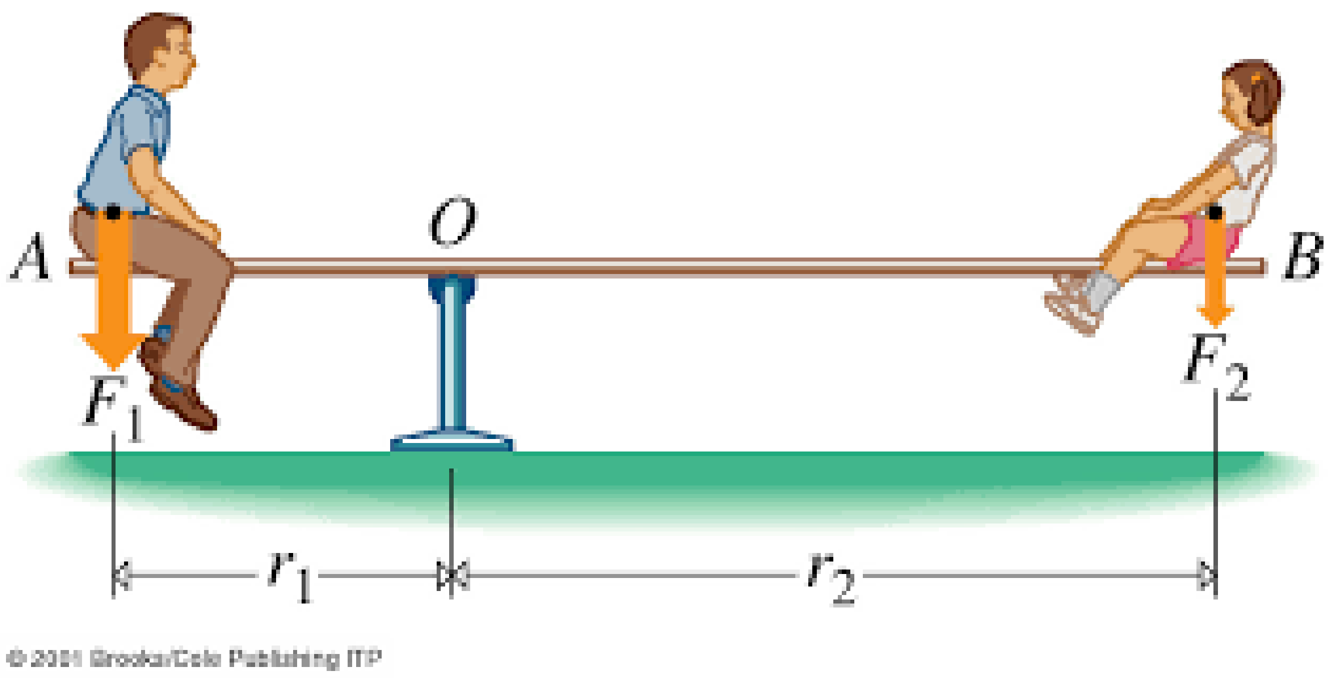
Le ***moment scalaire*** de la force $\vec{F}$ projeté sur l'axe $\Delta$ est la projection du moment vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ sur cet axe.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}).\vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{u}_\Delta$$

Le moment scalaire $\mathcal{M}_O(\vec{F})$ s'exprime en newton-mètre (N.m). Il indique comment la force $\vec{F}$ tend à faire tourner le point où elle s'applique autour de de l'axe $\Delta$.



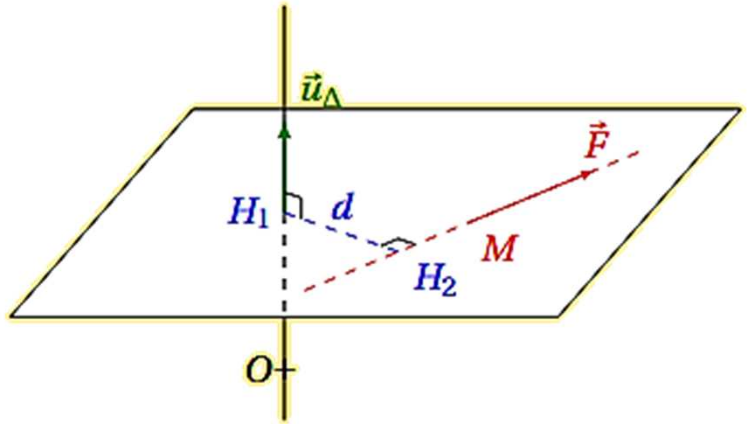
# Moment d’une force par rapport à un axe



# Moment d'une force par rapport à un axe

**Méthode : Utiliser le bras de levier** (cas où $\vec{F} \perp \vec{u}_\Delta$)

1. Faire un schéma.
2. Déterminer à l'aide d'un schéma le ***bras de levier*** $d$, c'est-à-dire la distance entre la droite dirigée par la force $\vec{F}$ et l'axe orienté $\Delta$.
3. $\left|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\right| = d.\left\|\vec{F}\right\|$
4. Le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ est donné par la règle de la main droite.



# Changer le point autour duquel on tourne

**Propriété : Relation de Varignon** (H.P.)

La relation de Varignon permet d'exprimer le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{H_1}(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ en un point $H_1$ lorsque l'on connait le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ de cette même force en un point $O$ :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{H_1}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \overrightarrow{H_1 O} \wedge \vec{F}$$

# Le moment cinétique

**Définition : Quantité de mouvement** (rappel)

Le vecteur *quantité de mouvement* $\vec{p}(M)$ d'un point matériel $M$ de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}(M)$ vaut :

$$\vec{p}(M) = m.\vec{v}(M)$$

**Définition : Moment cinétique vectoriel d'un point matériel en un point fixe du référentiel**

Soit un point matériel $M$ de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}(M)$.

Son ***moment cinétique*** $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ par rapport à un point $O$ est défini par :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

La norme du moment cinétique s'exprime en kg.m$^2$.s$^{-1}$.

# Le moment cinétique

**Définition : Moment cinétique scalaire d'un point matériel par rapport à un axe fixe**

Soit un point matériel $M$ de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}$.

Le ***moment cinétique scalaire*** $\mathcal{L}_\Delta(M)$ de ce point matériel $M$ par rapport à un axe $\Delta$, orienté par un vecteur $\vec{u}_\Delta$ et passant par O, fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la projection sur le vecteur $\vec{u}_\Delta$ du moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M)$ exprimé en $O$ :

$$\mathcal{L}_\Delta(M) = \overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M).\vec{u}_\Delta = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{v}(M)\right).\vec{u}_\Delta$$

La moment cinétique scalaire s'exprime en kg.m$^2$.s$^{-1}$.

# « PFD en rotation »

**Théorème du moment cinétique vectoriel** (exprimé en un point fixe d'un référentiel galiléen)

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique vectoriel d'un point matériel $M$ exprimé en un point fixe $O$ de $\mathcal{R}_g$ est égale au moment vectoriel en O de la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ qui s'exercent sur $M$ :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$$

# « PFD en rotation autour d'un axe »

**Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen**

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel $M$ par rapport à un axe $\Delta$ fixe dans $\mathcal{R}_g$ est égale au moment par rapport à l'axe $\Delta$ de la résultante des forces $\vec{F} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ qui s'exercent sur $M$ :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

# *Savoir-faire 2 - Etudier le pendule simple grâce au théorème du moment cinétique*

On considère un pendule dont toute la masse est localisée au point $M$. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note $a$ sa longueur. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g.\overrightarrow{u_z}$ avec z axe vers le haut et $g$ = 10 m.s$^{-2}$ constante. On fera usage des coordonnées cylindriques.

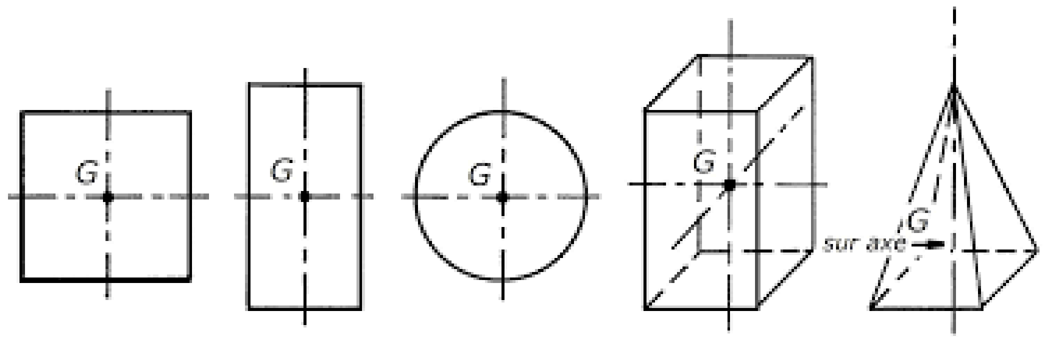
1. Donner l'expression du moment cinétique de la masse par rapport à $O$, en fonction de $a$, $\dot{\theta}$, $m$ et d'un vecteur bien choisi.
2. Donner l'expression du moment de chacune des forces s'exerçant sur la masse, par rapport à O.
3. Rappeler l'énoncé du théorème du moment cinétique. L'appliquer au cas présent afin d'en déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.
4. Faire une hypothèse qui permet de résoudre simplement cette équation. La résoudre.

On supposera qu'à $t = 0$ le pendule est en $\theta = 0°$ et qu'on lui communique une vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$.

5. Que vaut la période des oscillations pour une masse de 1 kg et un fil de 1,0 m de long ?

# Retour aux solides

# Centre d'inertie




**Définition : Centre d'inertie d'un système de points**

Le ***centre d'inertie*** (ou centre de masse) d'un système, noté $G$, est le ***barycentre des masses*** du système.

Dans le cas de deux masses $m_1$ et $m_2$ situées en $M_1$ et $M_2$, le centre d'inertie vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\,.\overrightarrow{OM_1} + m_2.\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$

où O est l'origine du repère que l'on place où cela nous arrange.

# Quantité de mouvement d’un solide

**Définition : Quantité de mouvement d’un système de points**

La ***quantité de mouvement*** d’un système est la somme des quantités de mouvement de tous ses points.

*Propriété* : cette quantité de mouvement s’écrit : $\vec{p} = m.\vec{v}(G)$ avec $m$ la masse totale du système, et $\vec{v}(G)$ la vitesse du centre d’inertie du système.

Ainsi pour la quantité de mouvement, ***tout se passe comme si toute la masse du système était concentrée au point $\boldsymbol{G}$***, avec une vitesse $\vec{v}(G)$.

# PFD pour un solide

**Loi : Principe fondamental de la dynamique pour un solide**

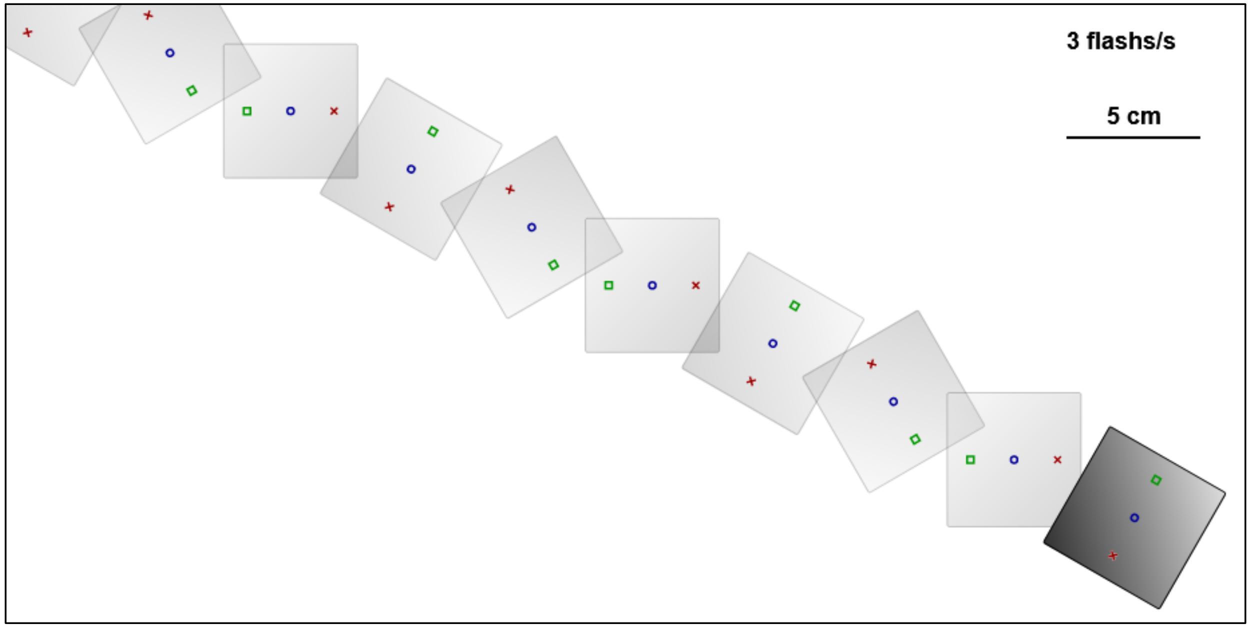
On considère un solide de centre d'inertie $G$, de masse totale (constante) $m$, dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen. Le principe fondamental de la dynamique pour ce solide s'écrit :

$$m.\frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

⚠ Seules les forces extérieures interviennent. Les forces internes au système (qu'une partie du système exerce sur une autre partie du système) n'interviennent pas.

➔ Pour le PFD, ***tout se passe comme si on avait un point matériel $G$ de masse $m$***. Le centre d'inertie $G$ est donc le point où est concentrée toute la masse du système pour ce qui concerne le PFD.

# PFD pour un solide




https://physique.ostralo.net/mvts_points_solide/

# 4. Etude d’un solide en rotation autour d’un axe fixe

C’est reparti pour un tour…

# Moment cinétique par rapport à un axe fixe

**Définition : Moment cinétique scalaire d'un système par rapport à un axe fixe**

On considère un système de points $M_i$ de masses $m_i$ tournant autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\omega$.

- Le ***moment cinétique de l'ensemble*** par rapport à un axe fixe est donné par la somme des moments cinétiques de chaque point :

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_i \mathcal{L}_\Delta(M_i)$$

- On peut montrer que le ***moment cinétique*** $\mathcal{L}_\Delta$ du système par rapport à $\Delta$ s'écrit :

$$\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta . \omega$$

avec $J_\Delta$ le ***moment d'inertie*** du solide par rapport à l'axe $\Delta$ exprimé en $kg.m^2$.

# Moment d’inertie

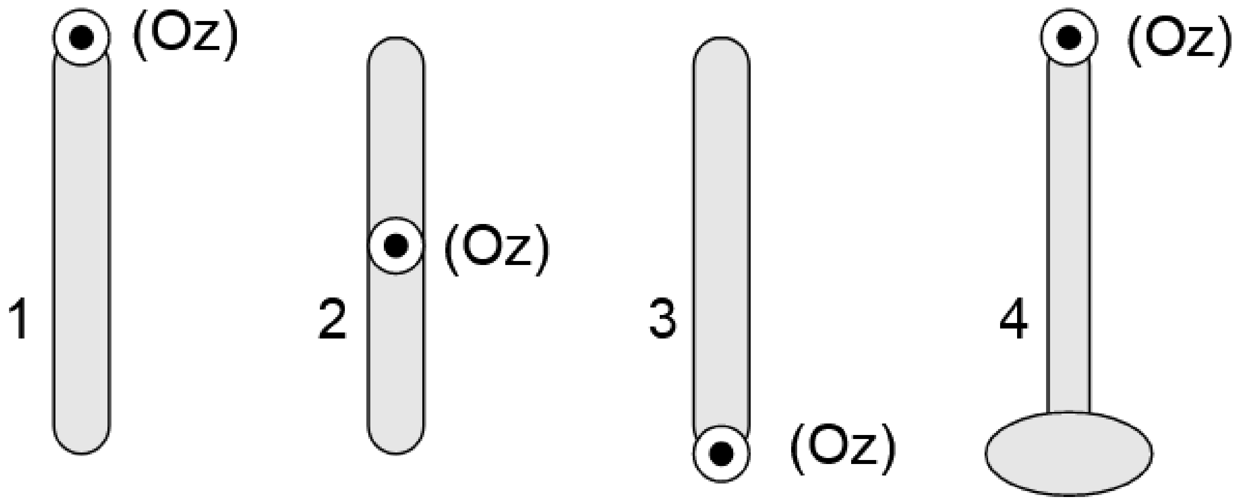
**Définition : Moment d’inertie**

Le ***moment d’inertie*** d’un système de points $M_i$ de masses $m_i$ s’exprime en kg.m$^2$ et se calcule de la manière suivante (formule Hors Programme) :

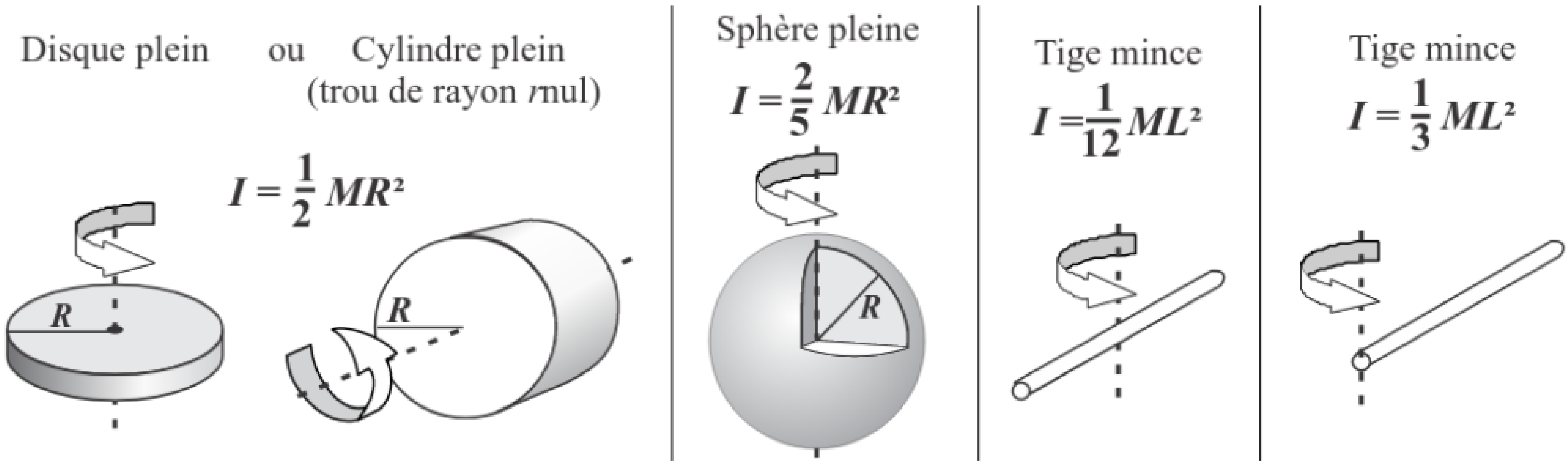
$$J_\Delta = \sum_i m_i.(OM_i)^2$$

Le ***moment d’inertie*** rend compte de la difficulté à mettre en rotation le solide (ou à arrêter sa rotation). Il dépend de l’axe par rapport auquel il est défini, de la masse du système, de sa répartition dans le solide et des dimensions.

# Moment d'inertie



# Moment d'inertie



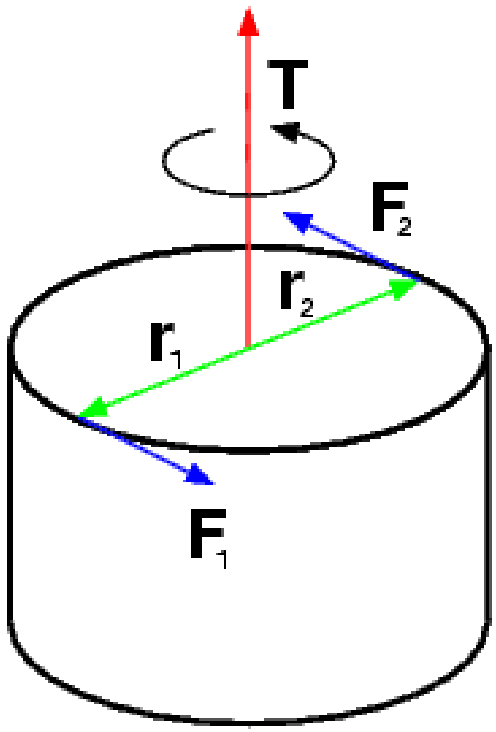

En exercice la formule donnée!

# Des actions mécaniques particulières

**Définition : Couple**

Un couple est une action mécanique (ou un ensemble d'actions mécaniques) de ***résultante nulle***, mais de ***moment non nul***.

Par métonymie, « couple » désignera souvent le moment du couple, et sera noté $\vec{\Gamma}$, $\vec{T}$ ou $\vec{C}$ sans besoin de préciser le point considéré. En effet, le moment d'un couple est ***indépendant du point par rapport auquel on le calcule***.

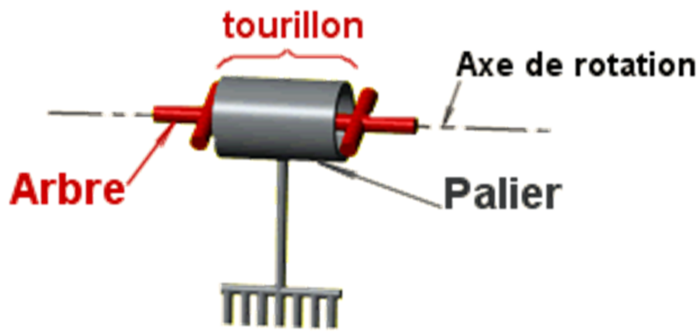


# Un détour par la S.I. : Liaison pivot

**Définition : Liaison pivot parfaite**

- Une ***liaison pivot*** d'axe $\Delta$ entre deux solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ est une liaison n'autorisant ***qu'une rotation*** de $\mathcal{S}_2$ par rapport à $\mathcal{S}_1$ autour d'un seul axe $\Delta$, fixe par rapport à $\mathcal{S}_1$.
- La liaison pivot d'axe $\Delta$ est ***parfaite*** si les frottements sont négligeables. Alors, le moment scalaire de l'action de contact entre les deux solides projeté sur l'axe $\Delta$ est nul :

$$\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot parfaite}) = 0$$



# Bilan des forces

**Méthode : Faire un bilan des actions mécaniques extérieures**

1. Je commence par faire un SCHÉMA. J'indique le sens $\oplus$ des moments.
2. Je précise le système étudié et le référentiel d'étude.
3. Je sépare les forces extérieures et les couples extérieures.
   (a) je fais le bilan des forces extérieures :
      - en précisant leurs points d'application ;
      - en n'oubliant pas la réaction de la liaison pivot.

   (b) je fais le bilan des couples extérieurs :
      - en n'oubliant pas de préciser si le couple de la liaison pivot est nul (pivot parfait).

# Tout ça pour ça…

**Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen**

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un ***solide en rotation*** à la vitesse angulaire $\omega$ autour d'un axe $\Delta$ fixe, la dérivée temporelle du moment cinétique $\mathcal{L}_\Delta$ est égale à la somme des moments par rapport à l'axe $\Delta$ de chacune des ***actions mécaniques extérieures*** (force avec point d'application ou couple) qui s'exercent sur le solide :

$$\frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} = \frac{d(J_\Delta . \omega)}{dt} = \sum_i \underbrace{\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{F_{i,ext}}\right) + \mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{\Gamma_{i,ext}}\right)}_{\mathcal{M}_\Delta^{ext}}$$

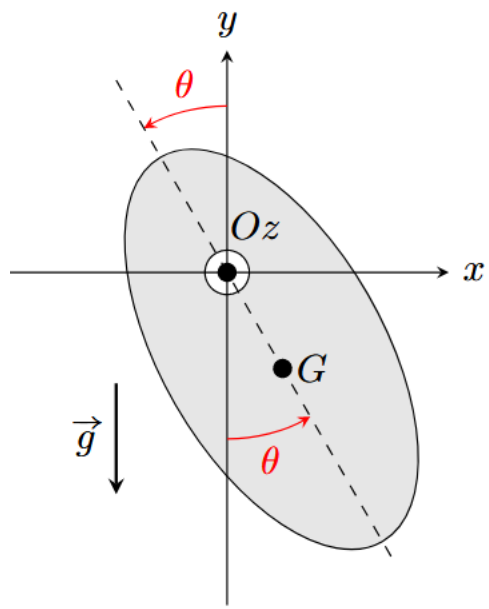
- Pour un solide indéformable, $J_\Delta = \text{cste}$, et on a alors :

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{F_{i,ext}}\right) + \mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{\Gamma_{i,ext}}\right)$$

## *Savoir-faire 3 - Etudier un pendule pesant grâce au théorème du moment cinétique*

On considère le pendule pesant schématisé ci-contre, en rotation autour de l'axe fixe $Oz$ horizontal. On note $J$ son moment d'inertie par rapport à $Oz$ et on pose $d = OG$.

1. Lister les actions mécaniques subies par le pendule, leur résultante et leur moment par rapport à l'axe $Oz$.
2. En déduire l'équation du mouvement par application du théorème du moment cinétique.
3. Peut-on retrouver cette équation par application du théorème de la résultante cinétique ? Quelle information donne ce théorème ?



# L’approche énergétique marche aussi pour les rotations!

# Energie cinétique

**Définition : Energie cinétique d'un point matériel $\boldsymbol{M}$**

L'énergie cinétique $E_C$ d'un point matériel $M$ de masse $m$ et de vitesse $v(M)$ vaut :

$$E_C(M) = \frac{1}{2}.m.v^2(M)$$

# Energie cinétique

**Définition : Energie cinétique d'un point matériel $\boldsymbol{M}$**

L'énergie cinétique $E_C$ d'un point matériel $M$ de masse $m$ et de vitesse $v(M)$ vaut :

$$E_C(M) = \frac{1}{2}.m.v^2(M)$$

**Définition : Energie cinétique d'un solide en rotation**

Soit un solide en rotation autour d'un axe orienté fixe $\Delta$ à la vitesse angulaire $\omega$. Son ***énergie cinétique***, exprimée en joule (J), vaut :

$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$$

avec $J_\Delta$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\Delta$.

# Puissance et travail

**Définition : Puissance et travail d'une action mécanique**

Soit un solide en rotation autour d'un axe $\Delta$ à la vitesse angulaire de rotation $\omega = \dot{\theta}$.

- S'il est indéformable, la puissance des actions mécaniques intérieures est nulle.
- La puissance d'une action mécanique extérieure s'écrit : $\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{M}_{\Delta}^{ext}.\omega$
- Le travail d'une action mécanique extérieure entre $A(t_A, \theta_A)$ et $B(t_B, \theta_B)$ :

$$W_{AB}^{ext} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}_{ext}.dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_{\Delta}^{ext}.d\theta$$

# Le retour du théorème de l'énergie cinétique

**Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe**

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un ***solide indéformable en rotation*** à la vitesse angulaire $\omega$ autour d'un axe $\Delta$ fixe, la variation de l'***énergie cinétique*** $E_C$ du solide entre deux points A et B est égale à la somme des ***travaux des actions mécaniques extérieures*** qui s'exercent sur le solide :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{AB}^{ext}$$

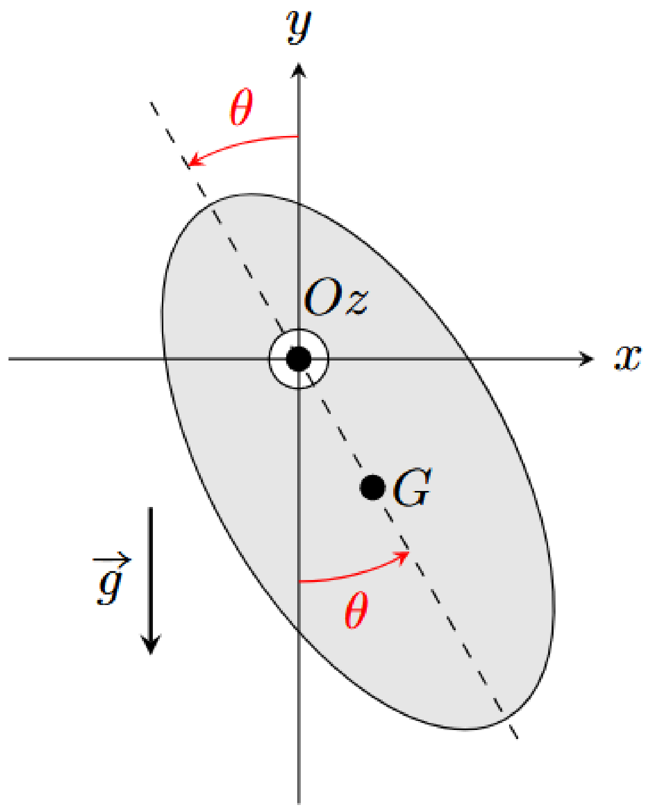
**Théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe**

Dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ galiléen, pour un ***solide indéformable en rotation*** à la vitesse angulaire $\omega$ autour d'un axe $\Delta$ fixe, la ***dérivée temporelle de l'énergie cinétique*** $E_C$ du solide est égale à la somme des ***puissances des actions mécaniques extérieures*** qui s'exercent sur le solide :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}^{ext}.\omega$$

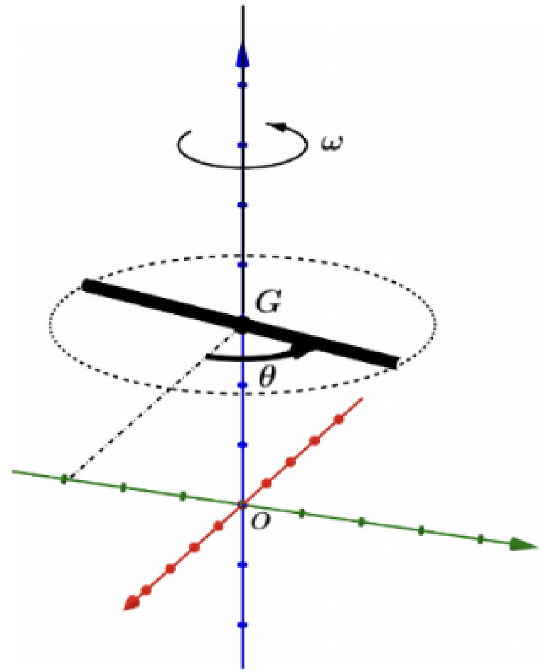
## *Savoir-faire 4 - Etudier un pendule pesant grâce au théorème de la puissance cinétique*

1. Retrouver l'équation du mouvement par une méthode énergétique.



# *Savoir-faire 5 – Etudier un pendule de torsion*

Un pendule de torsion est constitué d'un solide accroché à un fil vertical et pouvant tourner autour d'un axe $\Delta$ confondu avec le fil. Le barycentre $G$ (ou centre de masse ou centre d'inertie) se trouve sur le fil et on note $J_{\Delta}$ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe $\Delta$. Lorsque l'angle de rotation a une valeur $\theta$, le fil exerce sur le solide un couple de torsion de moment $\mathcal{M} = -C.\theta$ ($C$ étant sa constante de torsion).




1. En considérant qu'on néglige tout type de frottement, établir l'équation du mouvement du pendule à l'aide d'une approche énergétique.