"Peser la Terre", l'expérience de Cavendish

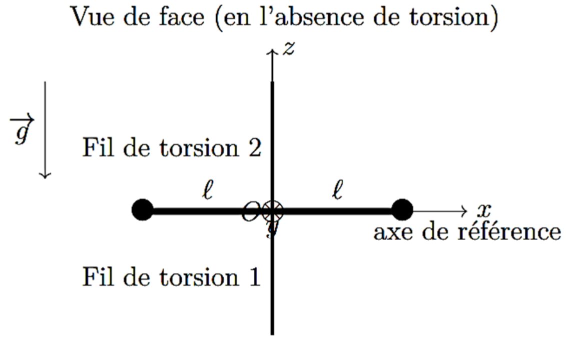
A - Détermination de la constante de raideur d'un fil de torsion

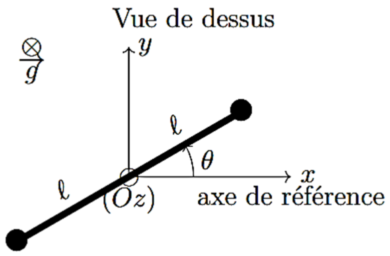
On réalise un pendule de torsion à l'aide de deux ***fils de torsion*** verticaux selon l'axe (Oz) (un en $z > 0$ et un en $z < 0$), chacun ayant une constante de raideur k.

On rappelle que, lorsque le fil est tordu d'un angle θ il exerce par rapport à son axe (ici l'axe vertical (Oz)) un couple de moment $\mathcal{M} = -k.\theta$.

Entre ces deux fils de torsion est fixée une tige de longueur $2.\ell$ = 40 cm parallèlement au sol du laboratoire (voir figure). Aux deux extrémités de cette tige sont attachées deux masses.

On note I le moment d'inertie de l'ensemble {masses + tige} par rapport à l'axe vertical (Oz).





Le système évoluant dans l'air, on supposera que les masses sont chacune soumises à une force de frottements visqueux de la forme $\overrightarrow{F_f} = -h.\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse de la masse. On négligera les frottements s'exerçant sur la tige.

On notera $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation.

<u>Équation du mouvement</u>

Q1. Donner l'expression du moment cinétique du système {masses + tige}.

Q2. Faire un bilan précis des actions mécaniques s'exerçant sur le système étudié, et représenter les forces sur un schéma.

Q3. Exprimer le moment résultant des deux forces de frottements fluides en fonction de h, ℓ et Ω. On vérifiera qu'il est n'est pas nul.

Q4. Établir l'équation différentielle satisfaite par l'angle $\theta(t)$ et la mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}.\dot{\theta} + \omega_0^2.\theta = 0$$

en donnant les expressions de τ et de ω_0 en fonction de I, h, ℓ et k.

<u>Résolution de l'équation</u>

À l'instant $t = 0$, le système est lancé de sa position de repos ($\theta = 0$) avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$. Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime d'oscillation du pendule de torsion soit pseudo-périodique.

Q5. Déduire de l'hypothèse précédente une condition sur h.

Q6. Déterminer alors la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle (en fonction de t, ω_0, τ et $\dot{\theta}_0$), puis tracer l'allure de sa représentation graphique.

Q7. Justifier que lorsque le régime est très faiblement amorti (c'est-à-dire lorsque $\tau \gg T_0$ où T est la période propre du système), la pseudo-période T est environ égale à T_0, et que la vitesse angulaire peut s'écrire

$$\Omega(t) \approx \dot{\theta}_0.e^{-\frac{t}{\tau}}.\cos(\omega_0.t)$$

<u>Étude énergétique</u>

Q8. Rappeler l'expression de l'énergie cinétique E_c du système en fonction de I et Ω.

On définit l'énergie potentielle associée à un couple de forces conservatif par la relation :

$\mathcal{M} = -\frac{dEp}{d\theta}$ où $\mathcal{M}$ est le moment du couple par rapport à l'axe de rotation.

Q9. En déduire l'expression de l'énergie potentielle associée au couple de torsion.

Q10. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $E_m(t)$ du système, dans le régime de faible amortissement, en fonction du temps t, du moment d'inertie I, de τ et de $\dot{\theta}_0$.

Q11. Sur un même graphique, tracer les allures de $E_p(t)$, $E_c(t)$ et $E_m(t)$. Interpréter physiquement.

<u>Approche expérimentale</u>

Q12. On appelle décrément logarithmique δ la quantité $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$, où T est la pseudo-période et t le temps. Exprimer δ en fonction de T et de τ dans le cas du régime de faible amortissement.

Le pendule oscille de 2 pseudo-périodes pendant 32 s et l'amplitude des oscillations est réduite d'un facteur 3 au bout de 10 oscillations.
On donne par ailleurs le moment d'inertie $I = 2{,}6.10^{-5}$ kg.m^2.

Q13. En déduire les valeurs numériques de :

- la pseudo-période T ;
- le décrément logarithmique δ ;
- la constante de temps τ ;
- la pseudo-pulsation et la pulsation propre ;
- la constante de raideur k des fils de torsion.

Q14. Si on suppose que la contribution majeure au moment d'inertie est celle des deux masses, et que celles-ci peuvent être considérées comme quasi-ponctuelles, donner une valeur approchée de leur masse.

B - L'expérience de Cavendish

L'expérience menée par Henry Cavendish en 1798 est la suivante : deux petites sphères de platine de masse m = 50 g sont placées aux extrémités d'une tige horizontale de longueur $2.\ell$ = 50 cm. Cette tige est suspendue à un fil de torsion de même nature que celui étudié précédemment, de constante de torsion k = 2, 0.10^{-6} N.m.

Deux sphères de plomb identiques de masse M = 30 kg, positionnées dans le plan horizontal de la tige, sont placées à une distance d = 15 cm du centre de chaque petite sphère de platine. Le pendule est alors dévié d'un angle α.

Lorsqu'on déplace les sphères de plomb dans une nouvelle position symétrique de la précédente et indiquée en pointillés sur la figure 2, le pendule tourne alors d'un angle 2α.

On négligera l'action de chaque grosse sphère sur la petite sphère la plus éloignée.

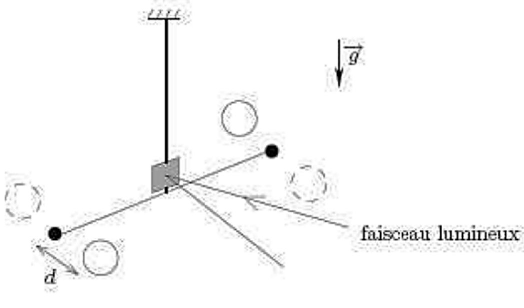


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience de Cavendish.

Q15. Exprimer la force gravitationnelle qui s'exerce sur chaque petite sphère. En déduire la déviation θ du pendule en fonction de G, M, m, ℓ, k et d.

L'angle dont tourne le pendule lorsque l'on permute les positions des grosses sphères est mesuré à l'aide d'un miroir fixé sur la tige qui relie les sphères. La déviation du faisceau lumineux est mesurée sur une échelle placée à une distance b = 4 m du pendule.

Q16. On mesure une déviation sur l'échelle de a = 9 mm. Déduire de cette mesure la valeur de G.

Q17. Expliquez comment, connaissant la valeur de G, on peut en déduire la masse de la Terre (plusieurs réponses sont possibles).

Q18. Déduire de la question précédente une estimation de la masse de la Terre. On pourra utiliser le fait que son rayon mesure 6400km.