

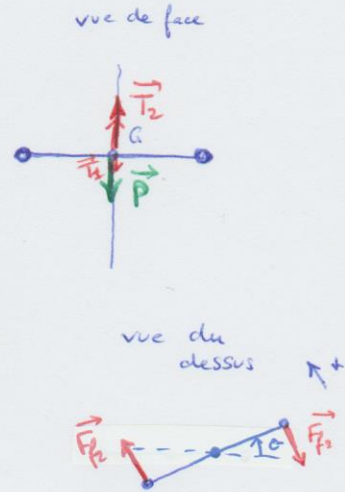
Peser la Terre: expérience de Cavendish.

Equation du mouvement :

Q1: $L_{Oz} = I \cdot \Omega$

- Q2: • système: { masses + tige }
 • référentiel: terrestre supposé galiléen
 • bilan des actions mécaniques extérieures:

- couple exercé par le fil du haut ($M_{Oz} = -k \cdot \theta$)
 - couple exercé par le fil du bas ($M_{Oz} = -k \cdot \theta$)
 - poids du système $\vec{P}$
 - tension exercée par le fil du haut (2) $\vec{T}_2$
 - tension exercée par le fil du bas (1) $\vec{T}_1$
 - Force de frottement visqueux sur la masse de gauche $\vec{F}_{f1}$
 - Force de frottement visqueux sur la masse de droite $\vec{F}_{f2}$
- (Rmq: $\vec{F}_{f1} + \vec{F}_{f2} = \vec{0}$)



Q3:
$$\begin{cases} M_{Oz}(\vec{F}_{f1}) = -l \cdot F_{f1} = -l \cdot h \cdot v = -l^2 \cdot h \cdot \Omega \\ M_{Oz}(\vec{F}_{f2}) = -l \cdot F_{f2} = -l^2 \cdot h \cdot \Omega \end{cases}$$
 (car $v = l \cdot \Omega$)

$\Rightarrow M_{Oz}(\vec{F}_{f1}) + M_{Oz}(\vec{F}_{f2}) = -2 \cdot l^2 \cdot h \cdot \Omega \neq 0$ $\Rightarrow \vec{F}_{f1}$ et $\vec{F}_{f2}$ forment un couple.

Q4: D'après le théorème du moment cinétique:

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = M_{Oz}(\vec{F}_{f1}) + M_{Oz}(\vec{F}_{f2}) + M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{T}_1) + M_{Oz}(\vec{T}_2)$$

car point d'application sur l'axe Oz

$$I \cdot \ddot{\theta} = -2k \cdot \theta + (-2 \cdot l^2 \cdot h \cdot \dot{\theta})$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2l^2 \cdot h}{I} \dot{\theta} + \frac{2k}{I} \theta = 0$$

on a $\gamma = \frac{I}{l^2 \cdot h}$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{I}}$

Q5: Pour avoir le régime pseudo-périodique il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif:

$$\Delta = \left(\frac{2l^2 \cdot h}{I}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2k}{I}\right) < 0 \Rightarrow h < \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot I}{l^4}}$$

$$\Delta = \frac{4}{\gamma^2} - 4\omega_0^2$$

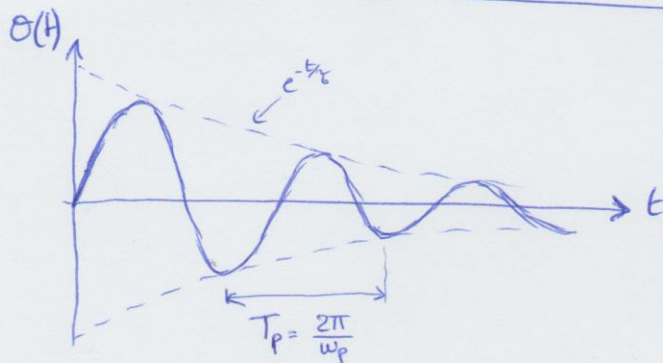
Q6: solution de l'équation caractéristique: $r = \frac{1}{\gamma}(-1 \pm i\sqrt{\gamma^2\omega_0^2 - 1})$ $\rightarrow$ facteur d'amortissement: $\frac{1}{\gamma}$ $(-Re(r))$
 $\rightarrow$ pseudo-pulsation: $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma\omega_0)^2}}$ $(Im(r))$

$$\Rightarrow \theta(t) = e^{-\frac{t}{\gamma}} \cdot [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)]$$

on utilise les conditions initiales:

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0} \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \Rightarrow -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} B \cdot \sin(0) + \omega_p \cdot B = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_p}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_p} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_p t)} \quad \text{avec } \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(2\omega_0 \tau)^2}}$$



Q7: si $\tau \gg T_0 \Rightarrow \tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow 2\omega_0 \tau \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{(2\omega_0 \tau)^2}} \approx 1 \Rightarrow \boxed{\omega_p \approx \omega_0}$
 et $\boxed{T \approx T_0}$

$$\begin{aligned} \Omega(t) = \dot{\theta}(t) &= \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) + e^{-\frac{t}{\tau}} \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right) \\ &= \underbrace{\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0 \tau}}_{\substack{\gg 1 \\ \rightarrow \ll 1}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) + \dot{\theta}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$\rightarrow \ll 1 \rightarrow$ négligeable devant le deuxième terme!

$$\Rightarrow \boxed{\Omega(t) = \dot{\theta}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t)}$$

Etude énergétique:

Q8: $\boxed{E_c = \frac{1}{2} I \cdot \Omega^2}$

Q9: Pour les 2 fils de torsion, le moment total exercé vaut: $M_{\text{tot}} = -2 \cdot k \cdot \theta$
 (par rapport à l'axe Oz)

or $M_\theta = -\frac{dE_p}{d\theta}$ donc $E_p(\theta) = k \cdot \theta^2 + c^{\text{ste}}$. On peut choisir comme référence $E_p(0) = 0$
 $\Rightarrow c^{\text{ste}} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(\theta) = k \cdot \theta^2}$$

Q10: $E_m(t) = E_c(t) + E_p(t)$

$$= \frac{1}{2} I \cdot \left(\dot{\theta}_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \right)^2 + k \cdot \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) \right)^2$$

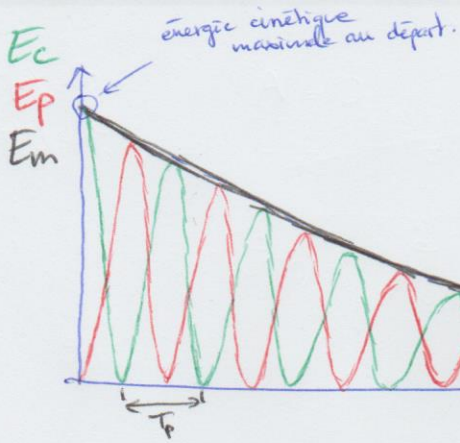
faible amortissement
 $\omega_p \approx \omega_0$

$$\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\theta}_0^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \left(\text{car } \omega_0^2 = \frac{2k}{I} \right)$$

Énergie cinétique
 initiale

Énergie mécanique initiale

Q11



Il y a échange d'énergie entre énergie cinétique et énergie potentielle de torsion à chaque oscillation.

A cause des forces de frottements, non-conservatives, l'énergie totale diminue.

Approche expérimentale

Q12: $\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \ln \left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{e^{-\frac{t+T}{\tau}}} \right) = \frac{T}{\tau}$
 $\sin(t) = \sin(t+T)$

Q13: 2 oscillations en 32 s $\Rightarrow T = 16$ s

• amplitude des oscillations réduites d'un facteur 3 au bout de 10 oscillations:

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+10T)} = 3 \Rightarrow \ln(3) = 10 \cdot \delta \Rightarrow \delta = \frac{10 \cdot T}{\ln(3)} = 146 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{T}{\tau} = 0,11$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{2\pi}{T} = 0,39 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \omega_0 \approx \omega_p \text{ (régime de faible amortissement)}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2k}{I} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega_0^2 \cdot I}{2}} \quad \text{AN: } k = 2,0 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$$

N.m (cohérent avec la définition $M = -k \cdot \theta$)

Q14 Formule H.P.

$$I = 2 \times m \cdot l^2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{I}{2 \cdot l^2}} \quad \text{avec } l = 20 \text{ cm}$$



AN: $m = 3,25 \times 10^{-4} \text{ kg}$ (ce sont de toutes petites masses!)

Expérience de Cavendish

Q15 : sur une petite sphère :

$$\|\vec{F}_g\| = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$$



Théorème du moment cinétique à l'équilibre :

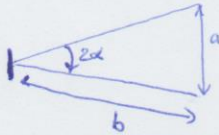
$$\frac{dL_{oz}}{dt} = 0 = \mathcal{M}_{\text{fil de torsion}} + 2\mathcal{M}(\vec{F}_g)$$

il y a deux grosses sphères qui exercent le même couple.

$$\Rightarrow -k \cdot \theta + 2 \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} \times \underbrace{l \cdot \sin(\theta)}_{\approx l \text{ (approx des petits angles)}} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m \cdot l}{k \cdot d^2}}$$

($\theta = \alpha$)

Q16



Avec $\alpha \ll 1 \Rightarrow \boxed{2\alpha \approx \frac{a}{b}} \Rightarrow \underline{\alpha = 1,13 \times 10^{-3} \text{ rad}}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot m \cdot l}{k \cdot d^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \frac{k \cdot d^2 \cdot \alpha}{2 \cdot M \cdot m \cdot l}}$$

AN: $G = 6,8 \times 10^{-11} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{s}^2}$

(valeur actuelle $6,67 \times 10^{-11}$ u.s.i.)

Q17 : $g \approx \frac{M_T \cdot G}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{M_T = \frac{g \cdot R_T^2}{G}} \Rightarrow \text{AN } M_T = \frac{9,81 \times (6,4 \times 10^6)^2}{6,8 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$

(très proche de la valeur admise aujourd'hui).