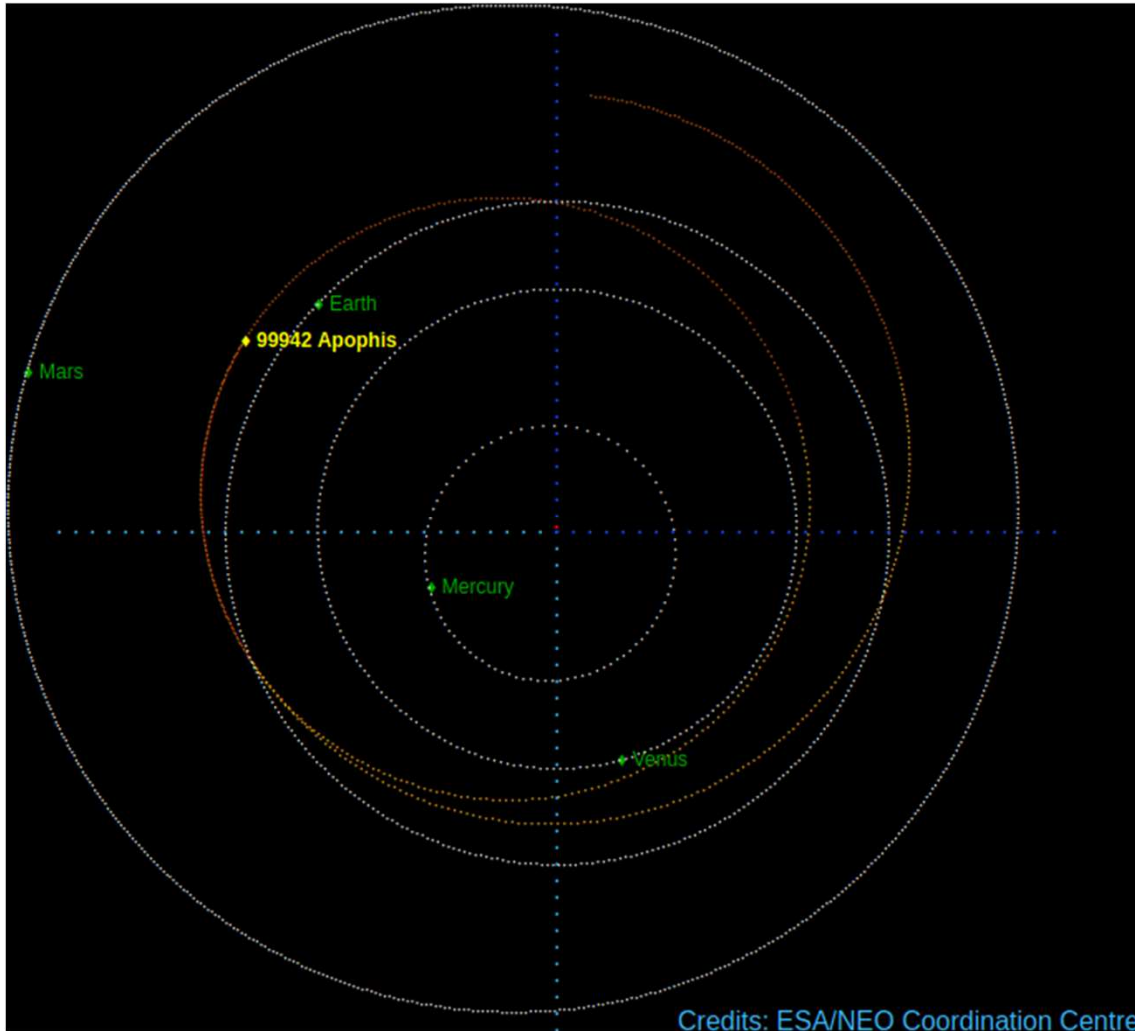


Mouvements dans un champ de force centrale conservatif

De la méca appliquée à l'astro...



Astéroïde Apophis, l'apocalypse en 2036 ?

Certains astéroïdes, dans leur course spatiale, s'approchent parfois de l'orbite terrestre. Ces géocroiseurs sont-ils une menace réelle pour la Terre ? Quels sont les moyens de prévention des risques de collision ?



<https://www.futura-sciences.com/sciences/dossiers/astronomie-asteroides-apocalypse-demain-1621/page/4/>

C'est quoi une force centrale conservative?

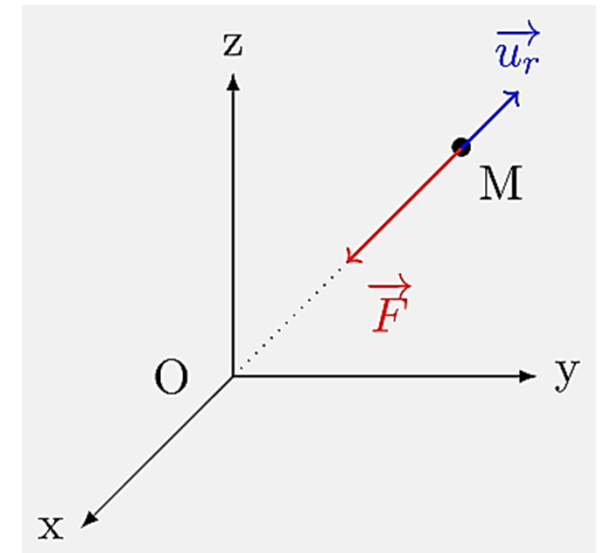
Définition : Champ de force centrale conservatif

- Un point matériel M est soumis à un champ de **force centrale** de centre O si, tout au long de son mouvement, la droite d'action de la force qui lui est appliquée passe constamment par O. On a alors :

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u}_r$$

- Une force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi. Dans ce cas, la force **ne dépend que de la position** du système. Le problème étant à symétrie sphérique de centre O, la force ne dépend que de la coordonnée radiale r .
- Un **champ de force centrale conservatif** est de la forme :

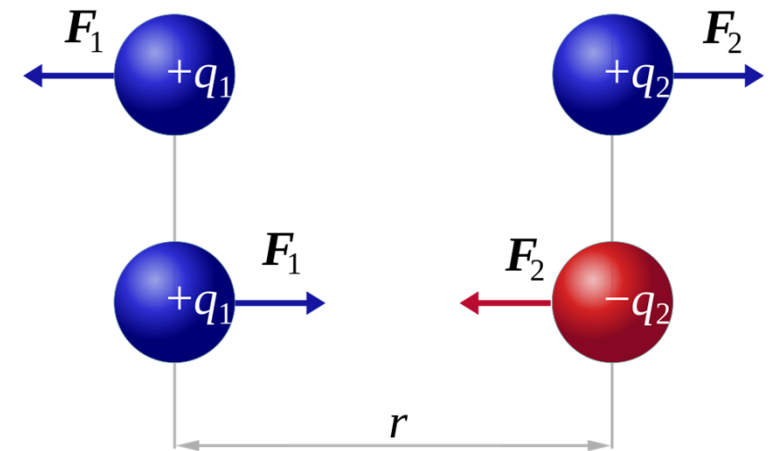
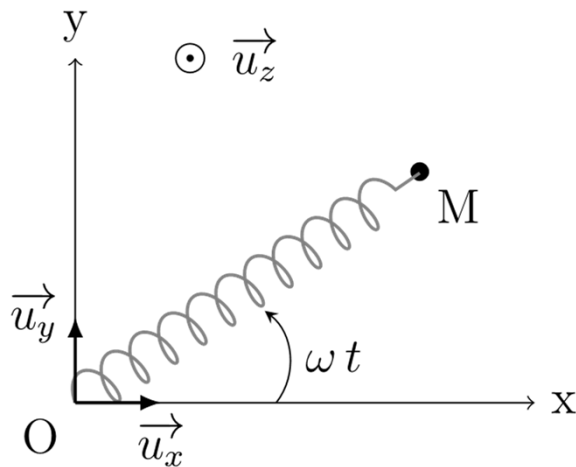
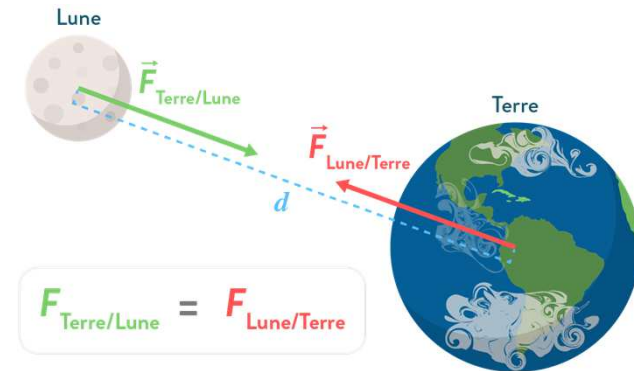
$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{u}_r}$$



Des exemples

Méthode : 3 exemples de forces centrales conservatives à connaître

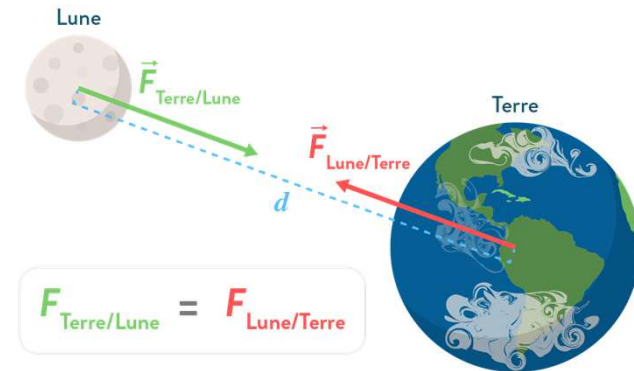
- Force de rappel d'un ressort attaché en O : $\vec{F}_r = -k \cdot (r - \ell_0) \cdot \vec{u}_r$
- Interaction gravitationnelle : $\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_O \cdot m_M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
- Interaction coulombienne : $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_O \cdot q_M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$



Des exemples

Méthode : 3 exemples de forces centrales conservatives à connaître

- Force de rappel d'un ressort attaché en O : $\vec{F}_r = -k \cdot (r - \ell_0) \cdot \vec{u}_r$
- Interaction gravitationnelle : $\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_O \cdot m_M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$
- Interaction coulombienne : $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_O \cdot q_M}{r^2} \cdot \vec{u}_r$

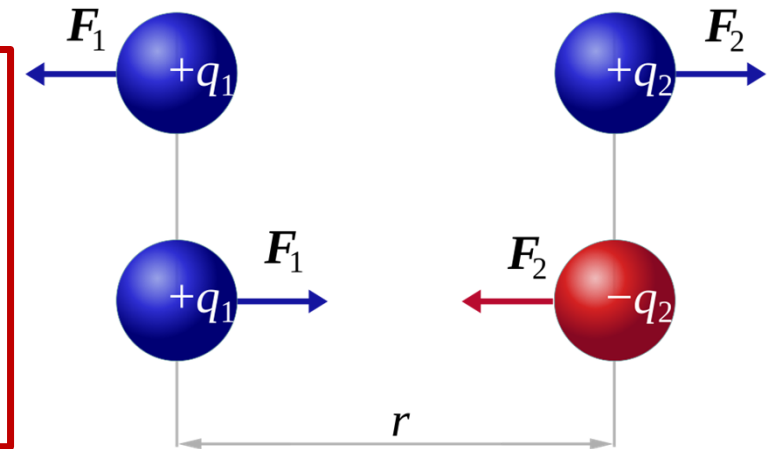


Définition : Force centrale newtonienne

On appelle **force centrale newtonienne** les forces de la forme :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

- Si la constante K est positive ($K > 0$), alors la force est **répulsive** ;
- Si la constante K est négative ($K < 0$), alors la force est **attractive**.



Étude du mouvement avec le moment cinétique

Savoir-faire 1 – Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et en déduire les conséquences.

On considère un point M de masse m soumis à un champ de force centrale $\vec{F}$, de centre O .

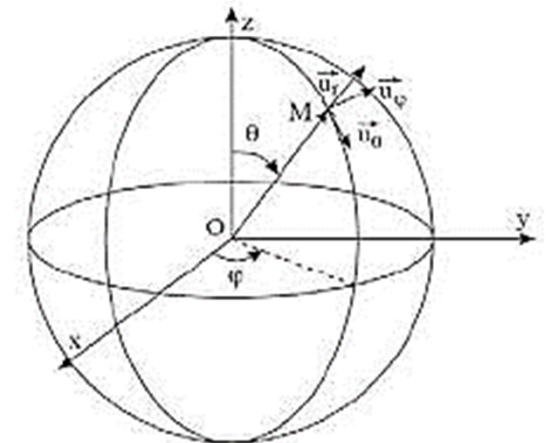
1. Montrer que le moment cinétique en O est conservé au cours du mouvement.
On utilisera les coordonnées sphériques de centre O .

Le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ est porté par $\vec{u}_z$.

2. Montrer qu'à tout instant, $\vec{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}_O$ et donc à $\vec{u}_z$. En déduire que le mouvement est dans le plan (xOy) .

On utilise les coordonnées polaires dans le plan (xOy) (vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$).

3. Montrer que la conservation du moment cinétique implique que la quantité $\mathcal{C} = r^2 \cdot \dot{\theta}$ est constante au cours du mouvement. Comment interprète-t-on ceci géométriquement ?



Propriété : Conservation du moment cinétique dans un champ de force centrale

Soit M un point matériel en mouvement dans un champ de force centrale conservative.

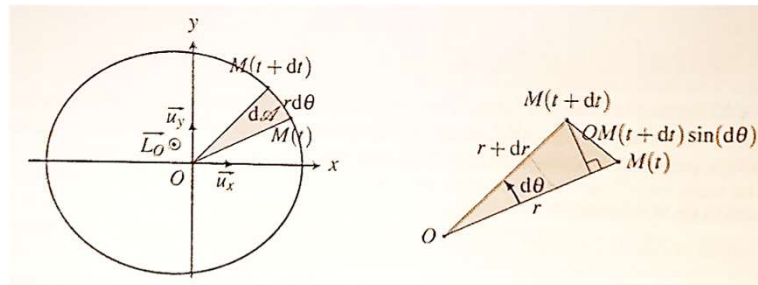
- Par application du théorème du moment cinétique on montre que **son moment cinétique se conserve**. Le moment cinétique est donc toujours égal à sa valeur initiale $\vec{L}_0$.

Conséquences :

- Le mouvement est inclus dans le plan normal au moment cinétique passant par le centre de force O ;
- L'aire balayée $\mathcal{A}$ par le rayon vecteur $\vec{OM}$ est proportionnelle au temps, et se fait à la **vitesse**

aréolaire $d\mathcal{A}/dt$ (en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$) **constante** : $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L_0}{2m} = \frac{\mathcal{C}}{2}$

avec $\mathcal{C} = L_0/m$ la **constante des aires**, ne dépendant que des conditions initiales.



L'aire $\Delta\mathcal{A}$ balayée pendant une durée Δt est là même pour toute la trajectoire et vaut :

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{\mathcal{C}}{2} \cdot \Delta t$$

Etude énergétique

Rappel : Force conservative et énergie potentielle

- Une force est dite **conservative** si **son travail ne dépend pas du chemin suivi**.
- Il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ de la position (repérée par le vecteur $\vec{r}$) telle que son **travail élémentaire** vérifie

$$\delta W(\overrightarrow{F_{cons}}) = -d\mathcal{E}_p$$

Cette fonction, définie à une constante additive près, est appelée **énergie potentielle**.

- Son **travail** sur un chemin $A \rightarrow B$ s'écrit comme l'opposé de la différence d'énergie potentielle en B et A :

$$W_{AB}(\overrightarrow{F_{cons}}) = -(\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A)) = -\Delta_{AB}\mathcal{E}_p$$

- Réciproquement, **une force conservative dérive d'une énergie potentielle**

$$\overrightarrow{F_{cons}}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$$

où $\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$ est le vecteur gradient de l'énergie potentielle.

Etude énergétique

Définition : Lien entre force centrale conservative et énergie potentielle

Puisque la **force centrale conservative** es de la forme $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{u}_r$, le gradient se simplifie et on peut écrire :

$$F(r) = - \frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}$$

où $\mathcal{E}_p(r)$ désigne l'énergie potentielle associée à ce champ de force.

Méthode : Energie potentielle associée à un champ de force centrale newtonienne

$$\vec{F}_{\text{Newton}} = \frac{K}{r^2} \cdot \vec{u}_r \implies \boxed{\mathcal{E}_p^{\text{Newton}}(r) = \frac{K}{r}}$$

Etude énergétique

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

La force s'appliquant au système est **centrale** et **conservative**. En l'absence de forces non-conservatives, l'**énergie mécanique** $\mathcal{E}_m$ du système **se conserve** :

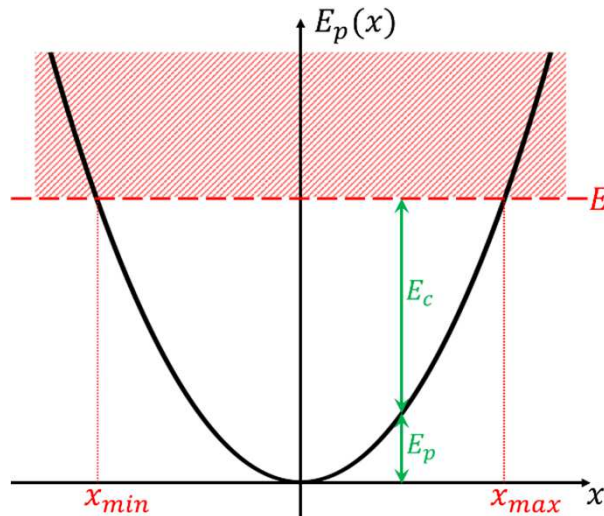
$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Etude énergétique

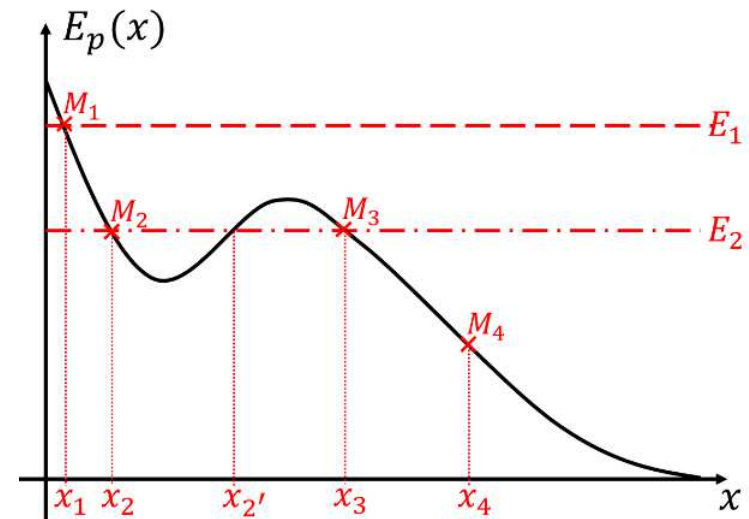
Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

La force s'appliquant au système est **centrale** et **conservative**. En l'absence de forces non-conservatives, l'**énergie mécanique** $\mathcal{E}_m$ du système **se conserve** :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \mathcal{E}_p(r) = cste$$



Souvenirs, souvenirs...



Etude énergétique

Méthode : Faire le lien avec le mouvement conservatif à 1 degré de liberté (chapitre M4)

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaire, $\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$, on a $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2}$ et l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2) + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Etude énergétique

Méthode : Faire le lien avec le mouvement conservatif à 1 degré de liberté (chapitre M4)

En utilisant l'expression de la vitesse en coordonnées polaire, $\vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$, on a $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2}$ et l'expression de l'énergie mécanique devient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2) + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Cette expression dépend de r et de θ . On peut éliminer $\dot{\theta}$ en utilisant l'expression du moment cinétique $\mathcal{L}_0 = m \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \cdot \left(\dot{r}^2 + \left(\frac{\mathcal{L}_0}{m \cdot r} \right)^2 \right) + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

On peut alors séparer les termes dépendant de $\dot{r}$ et ceux dépendant de r :

$$\mathcal{E}_m = \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{c,eff}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \cdot \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}}_{\mathcal{E}_{p,eff}} + \mathcal{E}_p(r) = cste$$

Etude énergétique

Définition : Lien entre force centrale conservative et énergie potentielle

- L'**énergie potentielle effective** $\varepsilon_{p,\text{eff}}$ est définie par :

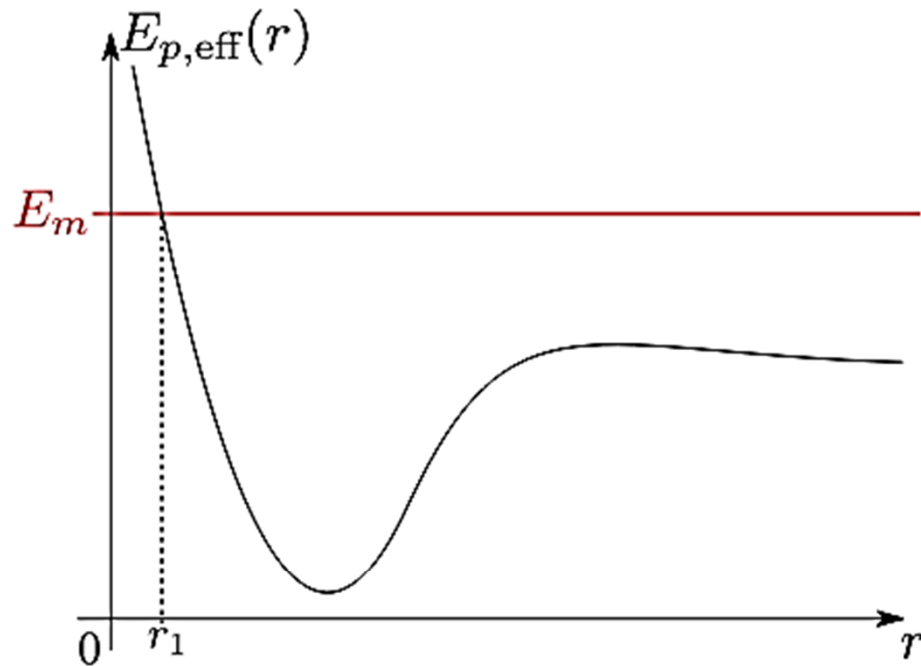
$$\varepsilon_{p,\text{eff}}(r) = \varepsilon_p(r) + \frac{1}{2}m \cdot \frac{\mathcal{C}^2}{r^2}$$

avec $\mathcal{C} = \mathcal{L}_0/m$ la constante des aires, ne dépendant que des conditions initiales.

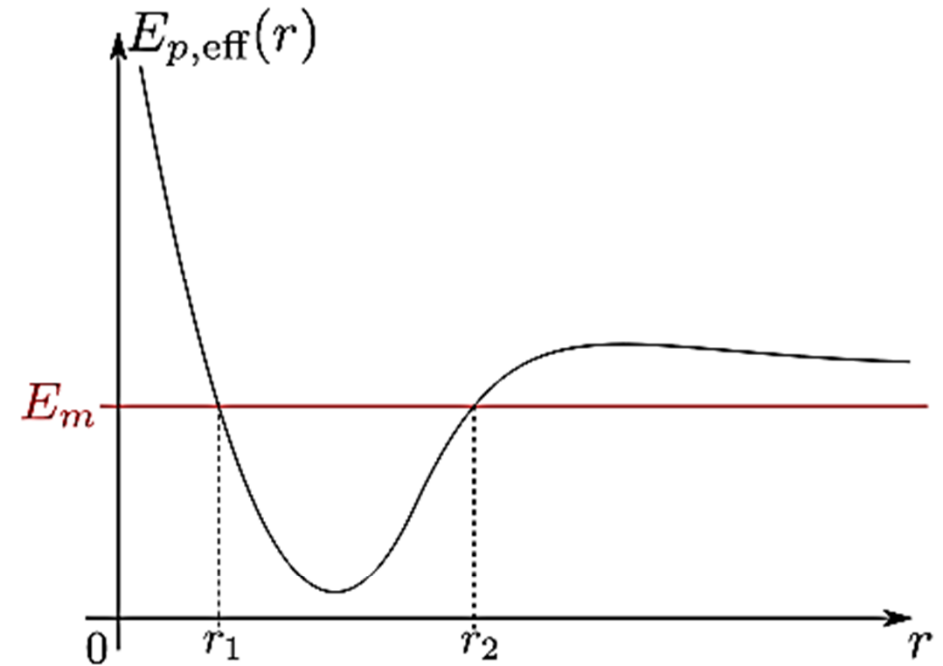
- Le terme $\varepsilon_{c,\text{eff}} = \frac{1}{2}m \cdot \dot{r}^2$ est appelé **énergie cinétique effective**. Elle ne dépend que de la vitesse radiale $\dot{r}$.
- L'**énergie mécanique** se conserve dans un mouvement à force centrale conservative, et vaut

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{c,\text{eff}} + \varepsilon_{p,\text{eff}} = \text{cste}$$

Etude énergétique



Zone accessible : $r \geq r_1$
 $\Rightarrow$ mouvement ouvert (ou de diffusion).



Zone accessible : $r_1 \leq r \leq r_2$
 $\Rightarrow$ mouvement borné.

Application aux planètes et satellites

Caractéristiques de la force d'attraction gravitationnelle

Définition : Caractéristiques de la force d'attraction gravitationnelle
(rappel)

Soient deux masses : m_{astre} fixe en O et m mobile portée par M.

- La masse m subit une force exercée par la masse m_O qui a pour expression :

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

avec $r = OM$ et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ u.S.I. la **constante gravitationnelle**.

- En choisissant $\mathcal{E}_p(r = +\infty) = 0$, l'**énergie potentielle gravitationnelle** associée vaut :

$$\mathcal{E}_p(r) = -G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{r}$$

Caractéristiques de la force d'attraction gravitationnelle

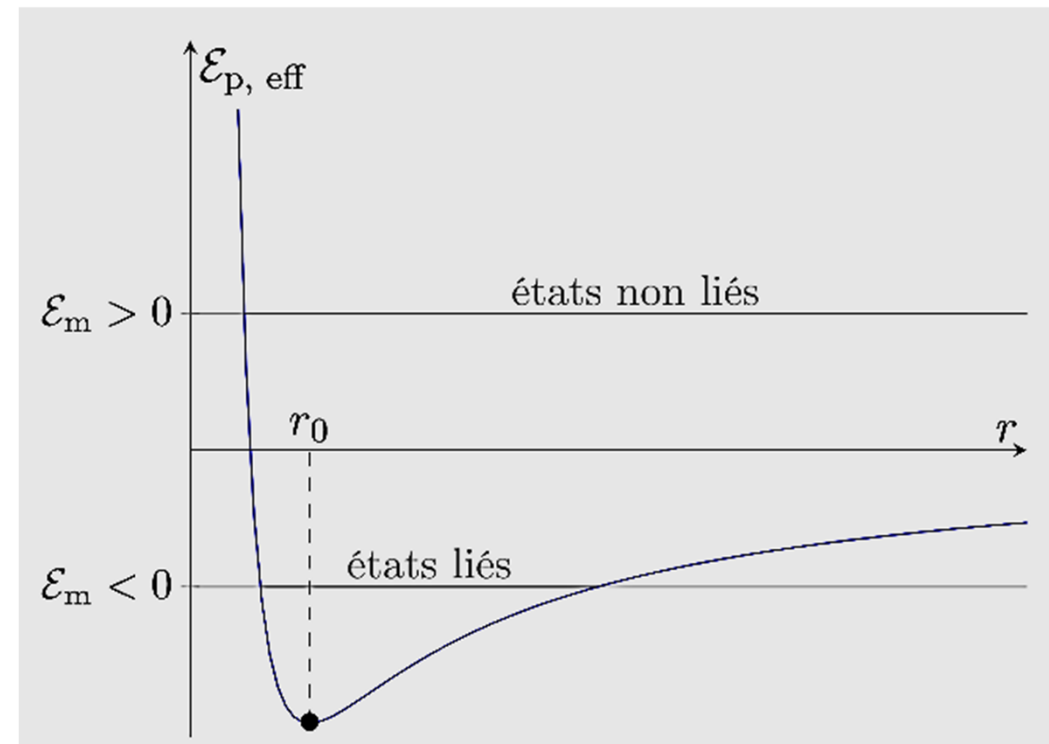
Définition : Energie potentielle effective associée à la force d'attraction gravitationnelle

Pour la force d'attraction gravitationnelle, l'énergie potentielle effective dépend de la distance r de la manière suivante :

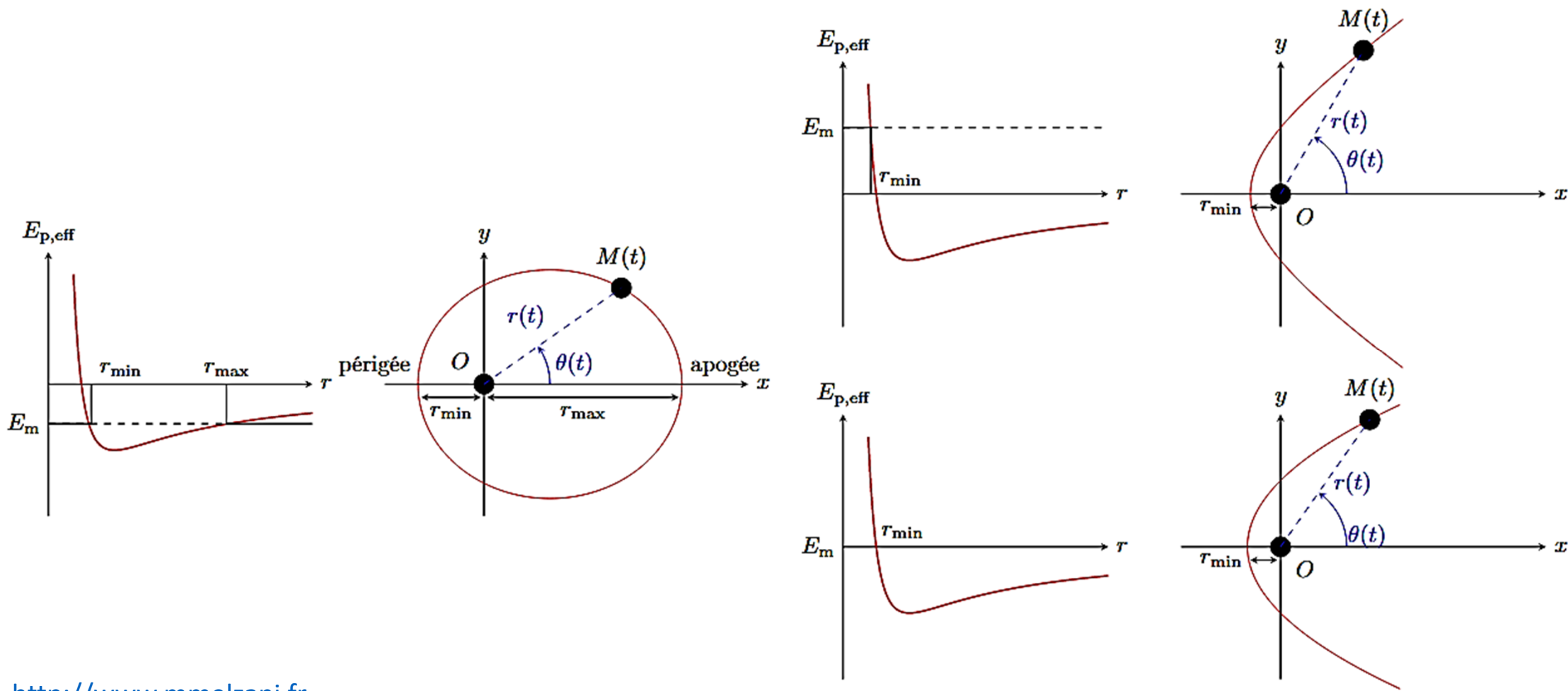
$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = -G \cdot \frac{m_{\text{astre}} \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m \cdot \frac{c^2}{r^2}$$

Selon la valeur de l'énergie mécanique du système la trajectoire peut être

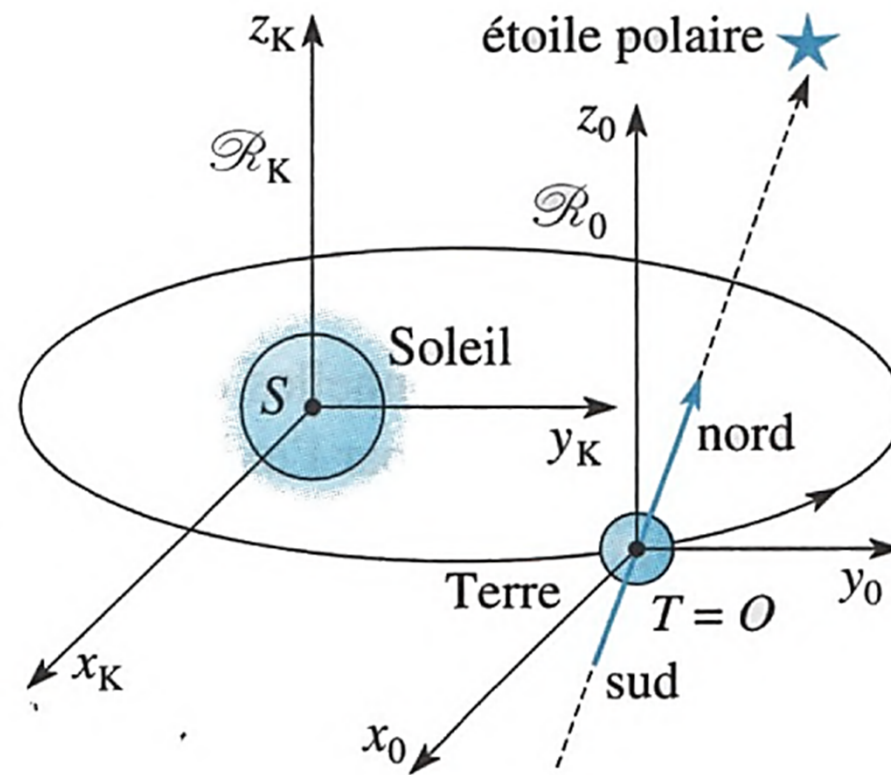
- bornée ($\mathcal{E}_m < 0$)
- ouverte ($\mathcal{E}_m \geq 0$).



Tout dépend de l'énergie mécanique initiale



Choix du référentiel pour étudier une planète



Les lois de Kepler

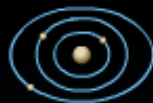


Johannes Kepler
1571-1630

Au début du XVII^e siècle, en utilisant les résultats des observations de Tycho Brahe, l'astronome **Johannes Kepler** formule **trois lois** qui décrivent le mouvement des planètes du système solaire.



La **première loi** de Kepler (ou loi des orbites) et la **deuxième** (ou loi des aires) ont été énoncées en **1609**.



La **troisième** (loi des périodes) a été établie en **1618**.

Les trois lois de Kepler énoncées dans le cas de planètes en orbite autour du Soleil peuvent être généralisées à tout satellite ou planète en orbite autour d'un astre.



Tycho Brahe
1546-1601

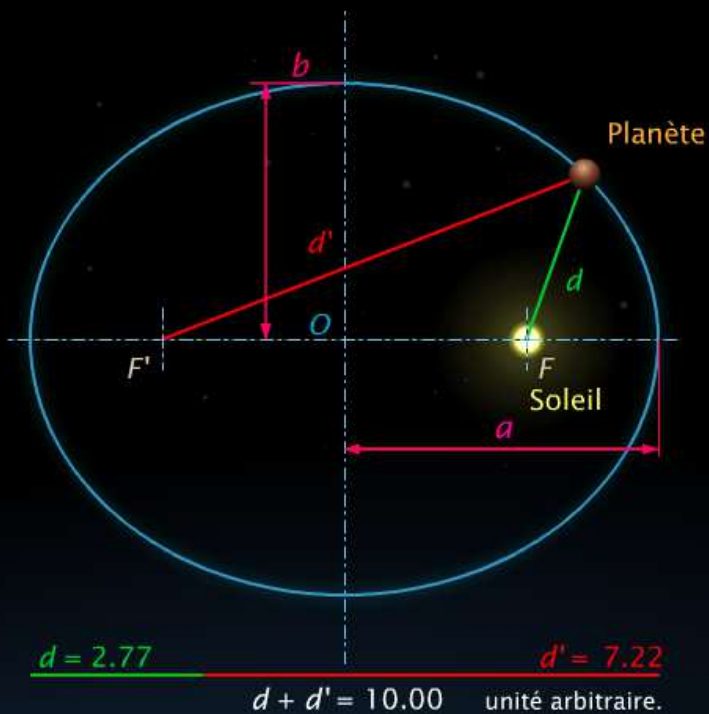
1^{ère} loi de Kepler

Première loi de Kepler ou loi des orbites :

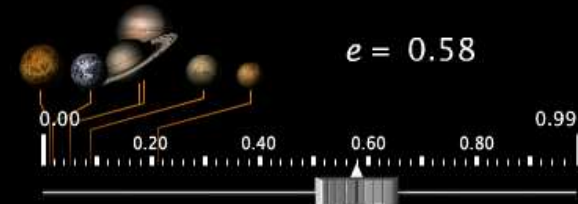
Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de gravité d'une planète est une ellipse dont le centre de gravité du Soleil est l'un des foyers.

Animation

Masquer les légendes



Choix de l'excentricité :



Légendes :

a : longueur du demi-grand axe

b : longueur du demi-petit axe

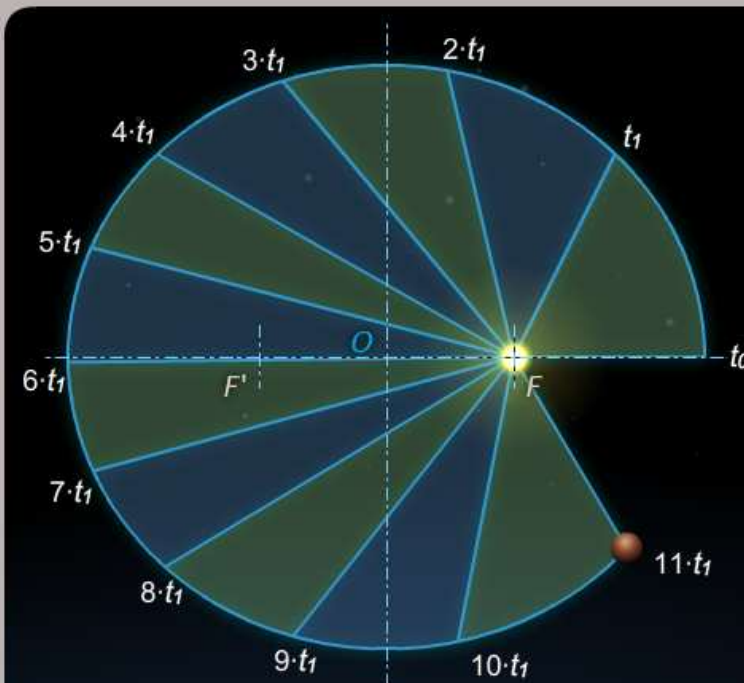
F et F' : foyers

e : excentricité donnée par la relation $e = \frac{OF}{a}$

2^{ème} loi de Kepler

Deuxième loi de Kepler ou loi des aires :

Le segment de droite reliant les centres de gravité du Soleil et de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

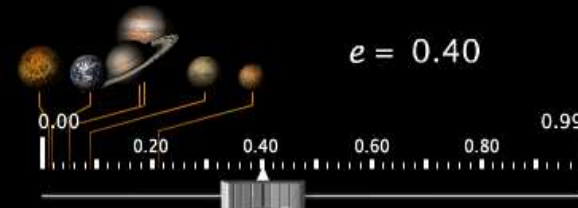


Les aires des secteurs colorés sont égales.

Arrêt animation

Masquer les légendes

Choix de l'excentricité :



Légendes :

F et F' : foyers

e : excentricité donnée par la relation $e = \frac{OF}{a}$

a : longueur du demi-grand axe

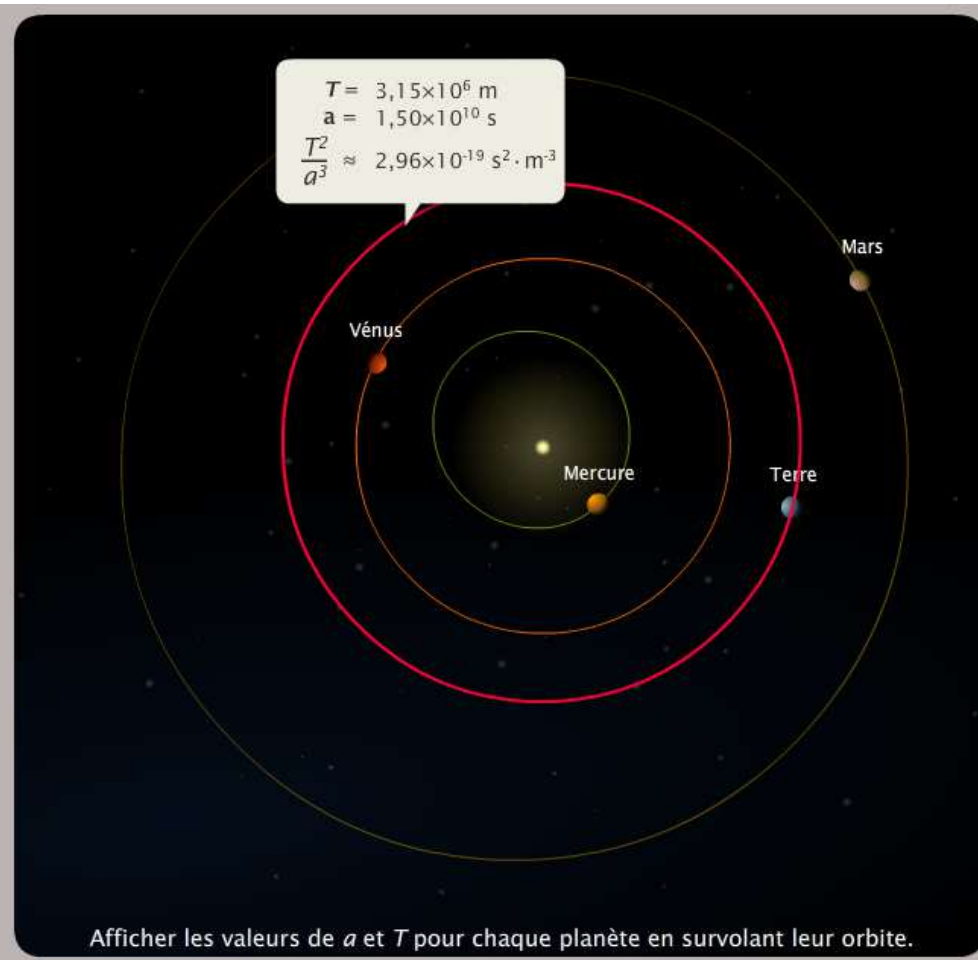
3^{ème} loi de Kepler

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes :

*Pour toutes les planètes
du système solaire, le
rapport entre le carré de
la période de révolution T
et le cube de la longueur a
du demi grand-axe est
constant :*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante.}$$

Cette loi peut être
généralisée à tout satellite
ou planète en orbite
autour d'un même astre.
La valeur de la constante
dépend de la masse M de
l'astre attracteur.



Etude des trajectoires circulaires

Savoir-faire 2 – Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période.

Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire.

On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire (rayon r_0).

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg sa masse.

On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme, c'est-à-dire que la norme du vecteur vitesse (ou la vitesse angulaire) est constante.
2. Donner l'expression de la norme v de la vitesse sur l'orbite, puis de la période du mouvement, en fonction du rayon R , de la masse de la Terre M_T et de la constante G .

Etude des trajectoires circulaires

Propriété : Vitesse le long d'une trajectoire circulaire

Dans le cas d'une **trajectoire circulaire**, le système parcourt cette trajectoire à la vitesse constante v_c :

$$v_c = \frac{2\pi \cdot r_0}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot m_{astre}}{r_0}}$$

où r_0 est le rayon de la trajectoire circulaire, T est la période de révolution et m_{astre} est la masse de l'astre autour duquel orbite le système.

Etude des trajectoires circulaires

Propriété : Constante de la loi périodes

Le carré de la période de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du rayon r_0 de la trajectoire circulaire qu'elle décrit :

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_{astre}}$$

où m_{astre} est la masse de l'astre autour duquel orbite le système.

On admettra que ce résultat se généralise à n'importe quelle trajectoire elliptique en remplaçant le rayon de la trajectoire circulaire r_0 par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_{astre}}$$

Et l'énergie dans tout ça ?

Savoir-faire 3 – Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.

Dans la suite, le satellite est en orbite basse, donc à une altitude (mesurée par rapport à la surface de la Terre) $h > R_T$. Sa distance au centre de la Terre O est donc $r_0 = R_T + h$.

1. Calculer sa période de révolution autour de la Terre.
2. Calculer également sa vitesse. Cette vitesse, qui est celle nécessaire à la mise en orbite d'un objet à altitude nulle, est appelée « première vitesse cosmique ». Ceci s'applique pour les satellites assez bas, comme par exemple l'ISS ($h = 400$ km).
3. Énergie mécanique : donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse m en fonction de G , M_T , m et r_0 , et montrer qu'elle est bien négative.
4. En bonus : Par un bilan énergétique, déterminer la vitesse que doit avoir une fusée pour échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre. Cette vitesse est appelée « seconde vitesse cosmique » ou vitesse de libération.

Et l'énergie dans tout ça ?

Propriétés : Energies pour une trajectoire circulaire

- **Energie cinétique :**

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \cdot v_c^2 = G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{2 \cdot r_0}$$

- **Energie potentielle :**

$$\mathcal{E}_p = -G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{r_0} = -2 \cdot \mathcal{E}_c$$

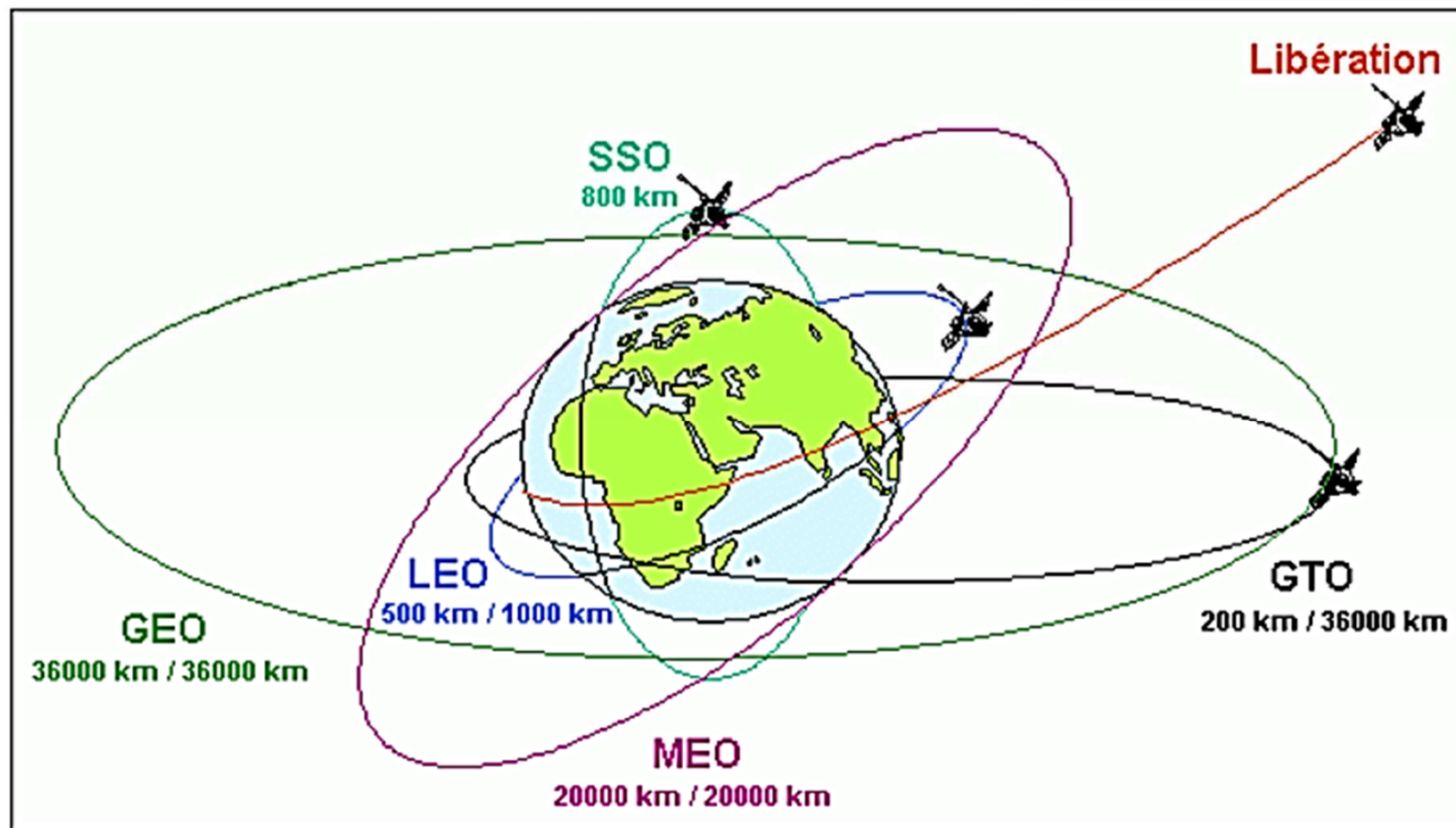
- **Energie mécanique :**

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\mathcal{E}_c = -G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{2 \cdot r_0} < 0 \text{ (état lié} \rightarrow \text{trajectoire bornée)}$$

On admettra que ce résultat se généralise à n'importe quelle trajectoire elliptique en remplaçant le rayon de la trajectoire circulaire r_0 par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique :

$$\mathcal{E}_m = -G \cdot \frac{m_{astre} \cdot m}{2 \cdot a}$$

Les satellites



Les satellites géostationnaires

Savoir-faire 4 – Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

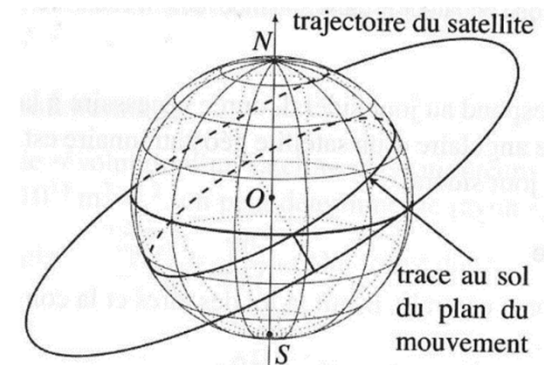
On considère un satellite en orbite autour de la Terre, dans le cas particulier où cette orbite est circulaire, dont on note R le rayon.

On se place dans le référentiel géocentrique, muni d'un repère polaire dans le plan de l'orbite, de centre O (centre de la Terre). On note M le point repérant le satellite, et m sa masse.

On note $R_T = 6400$ km le rayon de la Terre et $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg sa masse. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

On considère un satellite géostationnaire.

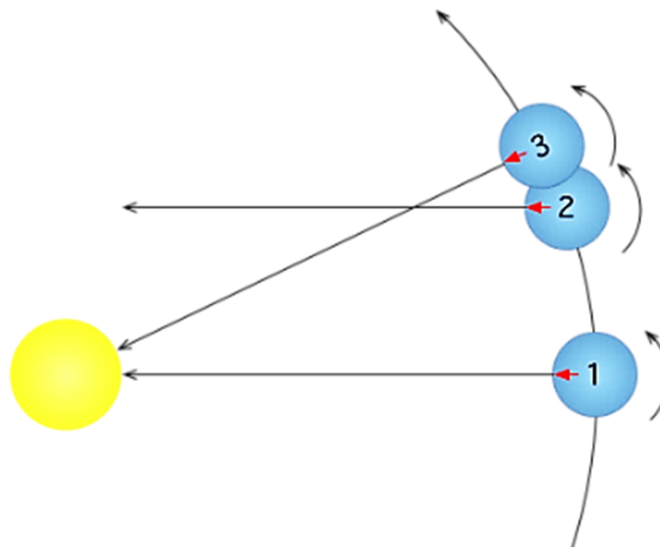
1. Expliquer en quoi “géostationnaire” consiste, et quel type d'orbite cela implique (en termes de forme, de localisation et de période).
2. Donner l'expression de la période du mouvement en fonction du rayon R , de la masse de la Terre M_T et de la constante G . On pourra pour cela appliquer le PFD au satellite.
3. En déduire la distance R , puis l'altitude h par rapport au sol.



Les satellites géostationnaires

Propriété : Mouvement d'un satellite géostationnaire

Dans le référentiel géocentrique, un satellite géostationnaire suit une **trajectoire circulaire et uniforme dans le plan de l'équateur** à une **altitude** $h = 36\,000$ km avec une période de $T_{\text{sidéral}} = 23$ h 56 min 4 s.



$$T_{\text{sidéral}} \neq T_{\text{solaire}}$$

Et pour l'interaction coulombienne?

Expérience de Rutherford (1911)

