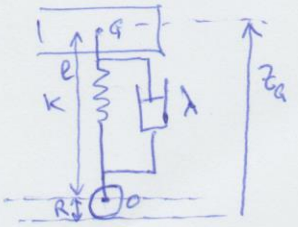
DS6 Partie Mécanique.

Exercice 4 :

Q47 :



- système : { véhicule assimilé au point matériel G }
- référentiel : terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces :
  - poids $\vec{P} = -m.g.\vec{u_z}$
  - réaction du ressort : $\vec{F_R} = -k.(z_G - z_0 - l_0)\,\vec{u_z}$
  - frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda.\left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right).\vec{u_z}$

Au repos ⇒ principe d'inertie : $\sum \vec{F_{ext}} = \vec{0} \implies \vec{P} + \vec{F_R} + \vec{F} = \vec{0}$ or $\vec{F} = \vec{0}$ au repos.

En projetant sur Oz : $-m.g - k(z_{Geq} - z_0 - l_0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{z_{Geq} = z_0 + l_0 - \frac{m.g}{k}}$$

Q48 : $E_{pp} = m.g.z_G + c^{ste} \overset{z = z_G - z_{Geq}}{=} m.g.z + c^{ste'}$

Q49 : $E_{pe} = \frac{1}{2}.k.(z_G - z_0 - l_0)^2 + c_3^{ste} = \frac{1}{2}.k.\left(z_G - \left(z_{Geq} + \frac{m.g}{k}\right)\right)^2 + c_3^{ste} = \frac{1}{2}.k.\left(z - \frac{m.g}{k}\right)^2 + c_3^{ste}$

Q50 : Théorème de l'énergie cinétique (version instantanée pour avoir l'équation du mouvement)

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F_{ext}}) = \vec{P}.\vec{v} + \vec{F_R}.\vec{v} + \vec{F}.\vec{v} \overset{\vec{v} = v.\vec{u_z}}{=} -m.g.v - k.(z_G - z_0 - l_0).v - \lambda.\frac{d(z_G - z_0)}{dt}v$$

or $\frac{dE_c}{dt} = m.v.\frac{dv}{dt}$ et $v = \frac{dz_G}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d^2z_G}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}.(z_G - z_0 - l_0) - \frac{\lambda}{m}\frac{d(z_G - z_0)}{dt}$$

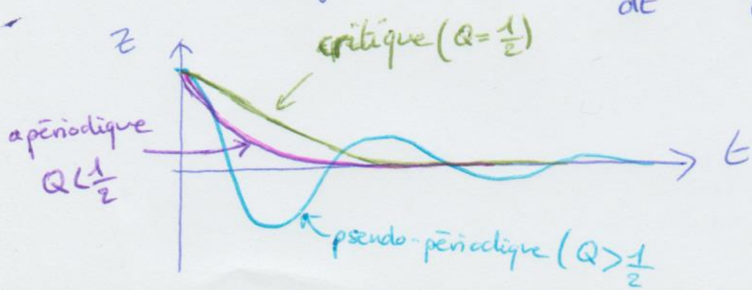
En utilisant $z_{Geq} = z_0 + l_0 - \frac{m.g}{k}$

$$\frac{d^2z_G}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}.\left(\underbrace{z_G - z_{Geq}}_{z} - \frac{m.g}{k}\right) - \frac{\lambda}{m}.\frac{d(z_G - z_0)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2z_G}{dt} = -\frac{k}{m}.z - \frac{\lambda}{m}.\frac{d(z_G - z_0)}{dt}$$

z_0 et z_{Geq} étant indépendant du temps $\Rightarrow \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}.\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}.z = 0}$

Q51 : A comparer à la forme canonique : $\frac{d^2z}{dt} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2.z = 0$ (pas demandé) $\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ Q = \frac{1}{\lambda}.\sqrt{m.k} \end{cases}$



Q52 $\|\vec{F}\| = \lambda . \dfrac{d(z_G - z_0)}{dt}$ N ; $\dfrac{d(z_G-z_0)}{dt}$ en $m.s^{-1}$ $\Rightarrow \lambda$ en $\underline{N.m^{-1}.s}$ (avec $N = kg.m.s^{-2}$ (PFD) on a $\underline{\lambda \text{ en } kg.s^{-1}}$)

Q53 : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec T : durée entre 2 bosses $\Rightarrow T = \dfrac{L}{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\omega}_{rad.s^{-1}} = \dfrac{\overbrace{2\pi}^{rad} . \overbrace{v}^{m.s^{-1}}}{\underbrace{L}_{m}}} \Rightarrow \text{homogénéité OK}.$$

Q54 : ~~On reprend la question Q50 mais z_0 dépend du temps et donc z_{Geq} aussi !~~ $\cancel{\dfrac{dz_{Geq}}{dt} = \dfrac{dz_0}{dt}}$

version 1

Définition de z_{Geq} pas claire.

$$\cancel{\frac{d^2 z_G}{dt^2} = -\frac{k}{m}. z - \frac{\lambda}{m}\left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right).}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}.z = -\frac{d^2 z_0}{dt^2}}$$

$$\cancel{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}.\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}.z = A.\omega^2.\cos(\omega.t)}$$

version 2 : $z_{Geq} = R + l_0 - \dfrac{m.g}{k}$ indépendant du temps et indépendant de $z_0(t)$.

La Bonnel

PFD (voir Q50) $\Rightarrow \dfrac{d^2 z_G}{dt^2} = -g - \dfrac{k}{m}.(z_G - z_0 - l_0) - \dfrac{\lambda}{m}.\dfrac{d(z_G - z_0)}{dt}$

avec $z = z_G - z_{Geq}$ $\Rightarrow \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -g - \dfrac{k}{m}.(z + z_{Geq} - z_0 - l_0) - \dfrac{\lambda}{m}.\left(\dfrac{dz}{dt} - \dfrac{dz_0}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z + \frac{\lambda}{m}.\frac{dz}{dt} = -\frac{k}{m}(R - z_0) + \frac{\lambda}{m}\frac{dz_0}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}.\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}.z = \frac{k}{m}.A.\cos(\omega.t) - \frac{\lambda}{m}.A.\omega.\sin(\omega.t)}$$

Q55 : Rapidement le transitoire disparait et on passe en régime permanent.
La sollicitation étant de forme sinusoïdale, il est normale de chercher une réponse de la même forme (régime sinusoïdal forcé).

Q56 : On repart de l'équation obtenue en Q54 et on passe en complexe :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}\cdot z + \frac{\lambda}{m}\cdot\frac{dz}{dt} = -\frac{k}{m}\cdot(R - z_0) + \frac{\lambda}{m}\cdot\frac{dz_0}{dt}$$

$(\underline{Z_0} - R = \underline{A}\, e^{j\omega t})$

passage en complexe et simplification par $e^{j\omega t}$

$$-\omega^2\cdot\underline{Z} + \frac{k}{m}\cdot\underline{Z} + \frac{\lambda}{m}\cdot j\omega\cdot\underline{Z} = \frac{k}{m}\cdot\underline{A} + \frac{\lambda}{m}\cdot j\cdot\omega\cdot\underline{A}$$

$$\boxed{\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\frac{k}{m} + \frac{\lambda}{m}\cdot j\cdot\omega}{-\omega^2 + j\omega\cdot\frac{\lambda}{m} + \frac{k}{m}}}$$

en factorisant par $\frac{k}{m}$: $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + \frac{\lambda}{k}\cdot j\cdot\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\left(\frac{k}{m}\right)} + j\omega\cdot\frac{\lambda}{k}}$

par identification

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $Q\cdot\omega_0 = \frac{k}{\lambda}$

$\boxed{\omega_1 = \frac{k}{\lambda}}$

$\boxed{Q = \frac{k}{\lambda\cdot\omega_0} = \frac{\sqrt{k\cdot m}}{\lambda}}$

Q57 : AN

$\omega_0 = 10\ s^{-1}$

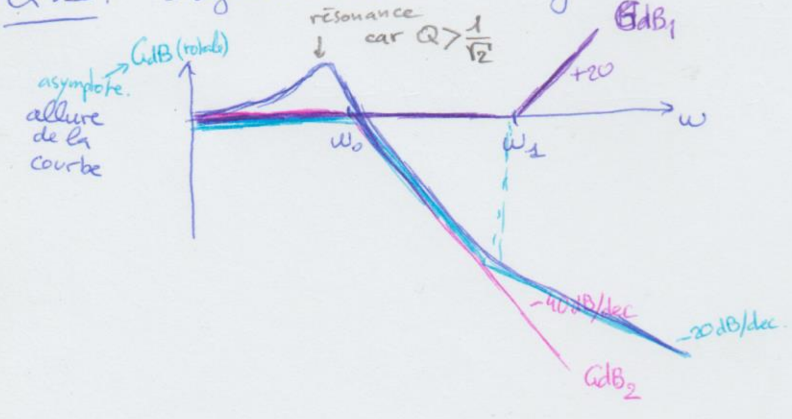
$\omega_1 = 25\ s^{-1}$

$Q = 2,5$

Q58 :

$$\boxed{\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Q59 : Diagramme de Bode en gain :



Q60 : Q53 → $\omega = \frac{2\pi\cdot v}{L}$

→ $\boxed{v = \frac{L\cdot\omega_0}{2\pi}}$ AN : $v = 1,6\ m.s^{-1}$ ($= 5,7\ km.h^{-1}$)

Pour $\omega = \omega_0$

$\boxed{|\underline{Z}| = Q\cdot\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2}\cdot|\underline{A}|}$

AN : $Z_{max} = 27$ cm.

↑ amplitude des oscillations

Q61 : si $v < 5\ km.h^{-1}$ → pulsation associée en dessous de la résonance (l'amplitude des oscillations ≃ 10 cm)

si $v > 50\ km.h^{-1}$ → la suspension agit comme un filtre passe-bas et les oscillations dues à la tôle sont atténuées.