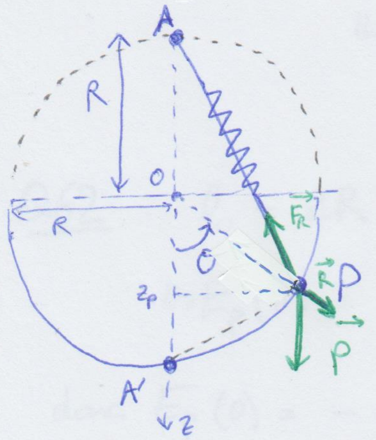
Exercice : Equilibre et stabilité d'une perle



Q57 :
- système : {perle P}
- référentiel : terrestre, supposé galiléen.
- Bilan des forces extérieures :
  - poids $\vec{P}$
  - Force de rappel du ressort $\vec{F_R}$
  - Réaction du support $\vec{R}$

- Le poids et la force de rappel du ressort sont des forces conservatives.
- Le travail de la réaction du support est toujours nulle car cette force est toujours perpendiculaire à la trajectoire

D'après le théorème de l'énergie mécanique, on en déduit donc :

$$\Delta E_m = W_{BC}(\overrightarrow{f_{non-conservative}}) = 0 \quad , \quad \forall \text{ B et C sur le demi-cercle C}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m = c^{ste}}$$

Q58 :

axe Oz positif vers le bas.

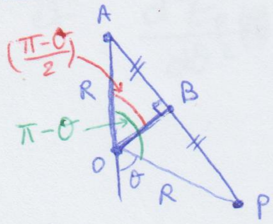
$$E_{pp}(P) = E_{pp}(0) - m.g(z_P - z_0)$$

$$E_{pp}(P) = E_{pp}(0) - m.g.R.\cos(\theta)$$

Comme $E_{pp}(0) = 0 \Rightarrow \boxed{E_{pp}(P) = -m.g.R.\cos(\theta)}$

(Démo : $\Delta E_{pp} = E_{pp}(P) - E_{pp}(0) \underset{\substack{\text{définition}\\\text{de l'énergie}\\E_{pp}}}{=} -W_{OP}(\vec{P}) = -\vec{P}\cdot\overrightarrow{OP} = -m.g.(z_P - z_0)$).

Q59 :



Dans le triangle OAB : $AB = R.\cancel{\sin}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

et $\boxed{AP = 2 \times AB = 2.R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Q60 $E_{pe}(AP) = \frac{1}{2}k.(AP - \ell_0)^2 + c^{ste}$ or $E_{pe}(AP = \ell_0) = 0 \Rightarrow c^{ste} = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{E_{pe}(\theta) = \frac{1}{2}.k.\left(2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2}$$

Q61 :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_p = -m.g.R.\cos(\theta) + \frac{1}{2}k.\left(2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2}$$

Q62 : $\ell_0 = 2R$

$$\Rightarrow E_p(\theta) = -m.g.R.\cos(\theta) + 2R^2.k.\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)^2$$

donc $E_p(0) = -m.g.R + \cancel{2.R^2.k(1-1)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{E_p(0) = -m.g.R}$$

AN : $E_p(0) = 2,0 \times 10^{-2}$ J

Q63 : · Position d'équilibre si extremum local

$\Rightarrow$ sur le graphe, $\theta = 0$ est une position d'équilibre

· Position d'équilibre stable si minimum local.

$\Rightarrow$ c'est le cas pour $\theta = 0 \Rightarrow$ équilibre stable.

Q64 : $\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow +m.g.R.\sin(\theta) + \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \times 2.R^2.k.\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) = 0$

$$m.g.R.2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2R^2.k.\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) = 0$$

$$2R.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(\underbrace{m.g.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{\geq 0} \times R.k\right) = 0$$

Physiquement l'angle est limité entre $-\pi$ et $+\pi$ $\Rightarrow$ $\frac{\theta}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$

Donc unique solution : $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$

et $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta) = m.g.R.\cos(\theta) + R^2.k \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos(\theta)\right)$

$\Rightarrow \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) = m.g.R > 0 \Rightarrow$ équilibre stable indépendemment de k !

Cas où $\ell_0 = R$

Q65 : $\theta = 0$ est toujours une position d'équilibre mais l'équilibre est stable pour $k = k_1$ et il est instable pour $k = k_2$ et $k = k_3$.

Q66 : • $E_p(\theta) = -m.g.R.\cos(\theta) + \frac{1}{2}k.\left(2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - R\right)^2$

• $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = m.g.R.\sin(\theta) - k.\left(2.R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - R\right) \times R.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$= 2\,m.g.R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - k.R^2.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\left(2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$

$\Rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ ou $2(mg - kR).\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + k.R = 0$

$\boxed{\theta = 0}$ ou ... possibilité d'autre position en fonction des conditions sur la grandeur $\frac{mg}{k.R}$

(si $k > \frac{2.mg}{R}$ alors $\theta_{eq} = \pm 2\arccos\left(\frac{kR}{2.(kR - mg)}\right)$)

⚠ physiquement le demi cercle est limité entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

→ on vérifie bien que $\theta = 0$ est position d'équilibre

• $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta) = m.g.R.\cos(\theta) - k.R^2.\cos(\theta) + \frac{kR^2}{2}.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

En $\theta = 0$: $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) = m.g.R - \frac{kR^2}{2}$

↳ $\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2} > 0 \Rightarrow m.g > \frac{kR}{2} \Rightarrow \boxed{k < \frac{2m.g}{R}}$

condition d'équilibre stable en $\theta = 0$

AN $k < 2{,}5\ \mathrm{N.m^{-1}}$

vérifiée seulement pour $k = k_1$.

Q67. Pour $k = k_1$, position d'équilibre stable en $\theta = 0$.

Pour $k = k_2$ et $k = k_3$, position d'équilibre instable en $\theta = 0$ mais apparition de 2 positions (symétriques par rapport à $\theta = 0$) d'équilibre stable sur le demi-cercle.