MPSI

Devoir de Physique - Chimie n°4

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte 3 exercices totalement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

L'exercice 1 est un exercice de cours. Les étudiants plus à l'aise traiteront **à la place** l'exercice 1bis en fin de sujet.

L'énoncé est constitué de 10 pages.

Consignes générales

- Lire la totalité de l'énoncé et commencer par les exercices les plus abordables.
- Un résultat d'une question précédente peut être admis pour poursuivre l'exercice.

Présentation de la copie :

- Encadrer les expressions littérales et souligner les résultats numériques.
- Numéroter les pages sous la forme x/nombre total de pages.

Rédaction :

- Faire des **schémas** grands, beaux, complets, lisibles.
- **Justifier toutes vos réponses.**
- Les **relations** doivent être **homogènes**.
- Applications numériques : nombre de chiffres significatifs adapté et avec **une unité**. Les résultats sans la bonne unité ne seront pas pris en compte.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 : Pendule simple (Exercice de cours)

On considère un point M de masse m suspendu par un fil de longueur ℓ accroché à un point O. L'ensemble forme ce qu'on appelle un pendule simple.

Le pendule est repéré par l'angle θ et on notera Oz l'axe vertical orienté vers le haut.

On lâche le point M d'un angle θ_0 et sans vitesse initiale. Les frottements sont négligés.

Q1. Faire un schéma du dispositif.

Q2. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,p}$ du système en une position quelconque en fonction de m, ℓ, θ et g l'intensité de pesanteur.

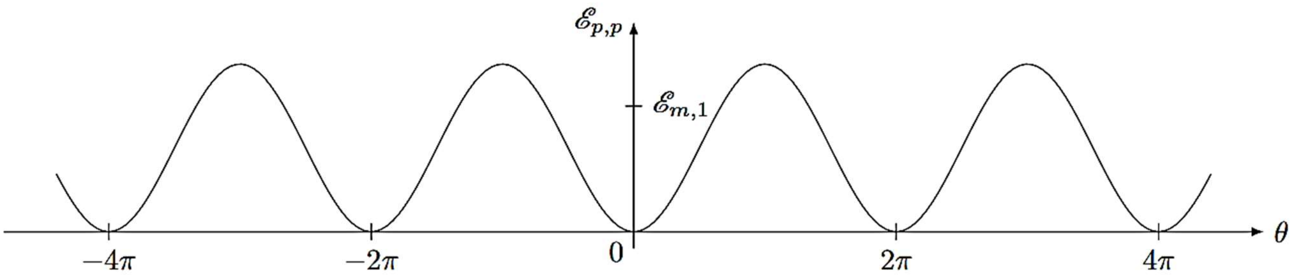
Q3. Le système est-il conservatif ? Justifier.

Q4. Établir l'expression de la norme de la vitesse en fonction de θ.

Q5. Quelle est la valeur numérique de la vitesse au niveau le plus bas pour un angle θ_0 = 30° et un fil de longueur ℓ = 30 cm.

Q6. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ. Cette équation est-elle linéaire ? Justifier.

On trace, ci-dessous, l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ en fonction de l'angle θ.



Q7. Un système possédant une énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,1}$ est-il dans un état de diffusion ou dans un état lié ? Justifier.

Q8. Identifier graphiquement les positions d'équilibre possibles pour le pendule. Sont-elles stables ou instables ?

On prend maintenant en compte les frottements. On introduit la force $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$.

Q9. Le système est-il conservatif ? Justifier.

Q10. Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ.

Q11. En étudiant les petites oscillations du pendule, peut-on résoudre facilement cette équation ?

Exercice 2 : Accordeur de guitare (d'après TSI Centrale 2019)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.
- On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique

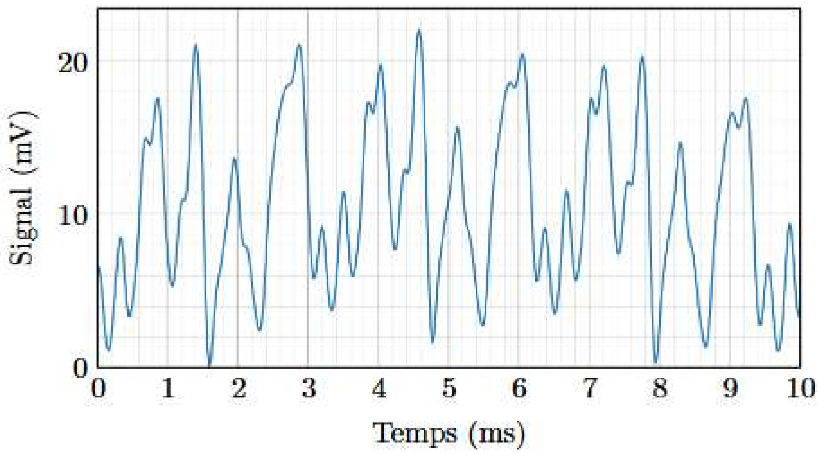


Figure 2 Signal de la guitare

Q12. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

Q13. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

Q14. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

Q15. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaitre des harmoniques ? Justifier.

B – Filtrage du premier ordre

Le son émis par la guitare est acquis par le micro de l'accordeur et transformé en le signal électrique u_e. Il est ensuite envoyé sur le filtre ci-dessous (filtre (F_a)).

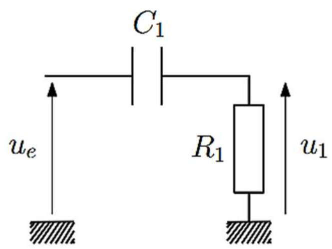


Figure 3 Filtre (F_a)

Q16. Déterminer sans calcul la nature de ce filtre.

Q17. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1, C_1 et de la pulsation ω du signal.

Q18. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Q19. Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique.

Q20. On a choisi R_1 = 100 kΩ et C_1 = 100 nF. Calculer la fréquence de coupure f_1 à −3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

C – Extraction du fondamental

Une fois ce premier traitement effectué, le signal u_1 passe dans un filtre très sélectif permettant de sélectionner sa fréquence fondamentale f_{co}. Cette fréquence est a priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur f_{ac} (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder. Le principe du filtre (F_b) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac}.

La figure 4 ci-dessous représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_b) tracé à deux échelles différentes.

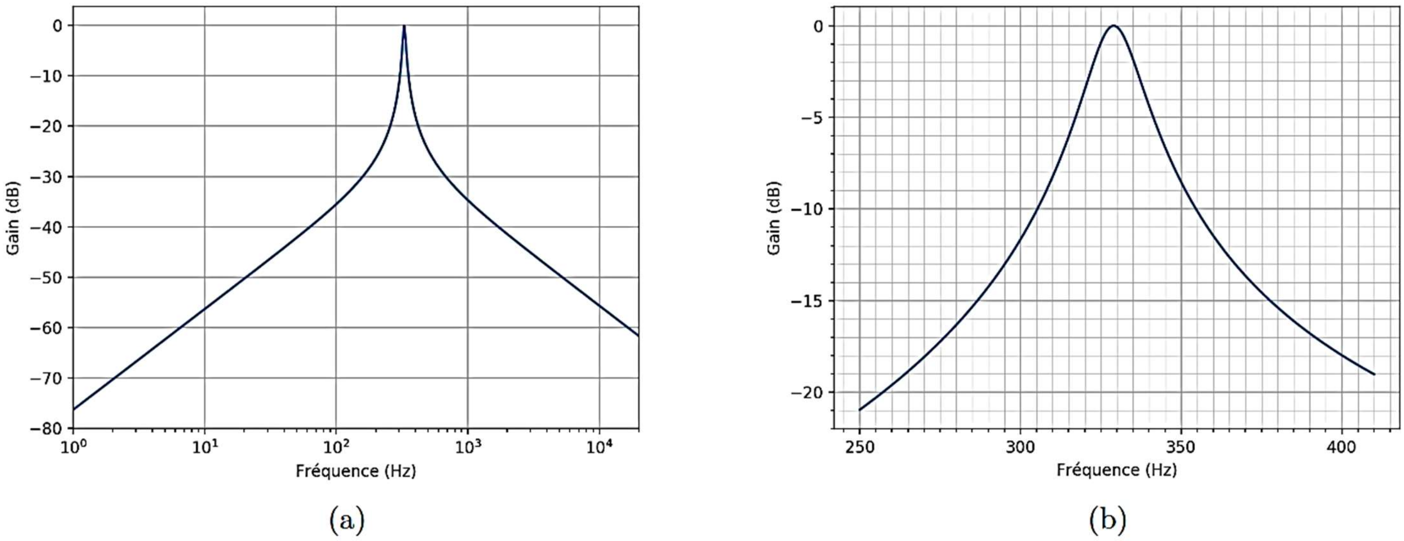


Figure 4 - Diagramme de Bode en gain du filtre (F_b)

Q21. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Q22. Donner une estimation de sa bande-passante à −3 dB après l'avoir définie.

Q23. Si la corde est désaccordée à f_{co} = 315 Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre. Même question pour le 3$^{\text{ème}}$ harmonique (à la fréquence $3f_{co}$).

D – Analyse spectrale

La figure 5 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

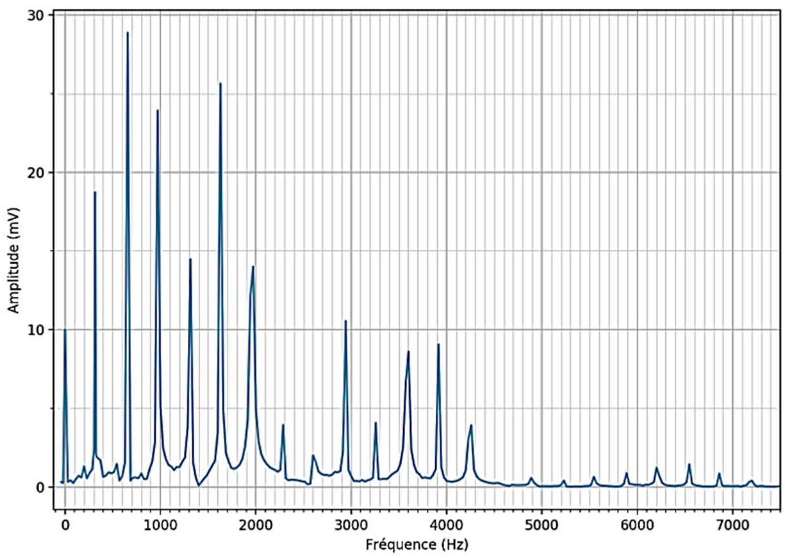


Figure 5 - Spectre du signal d'entrée

Q24. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

Q25. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 6 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

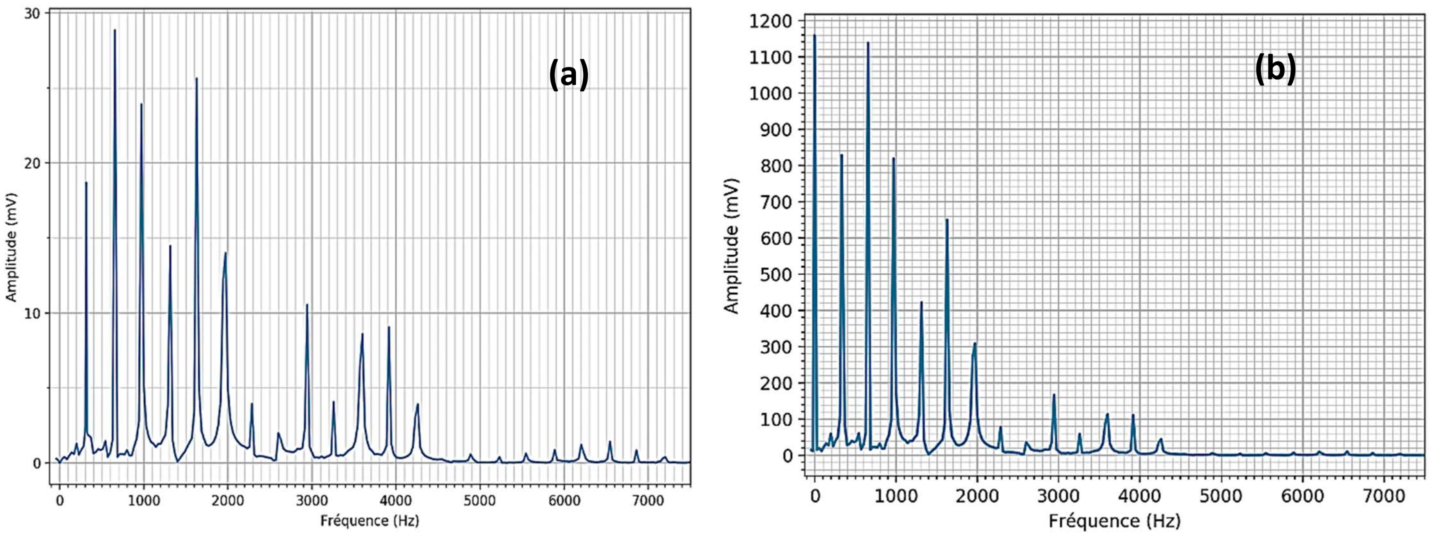
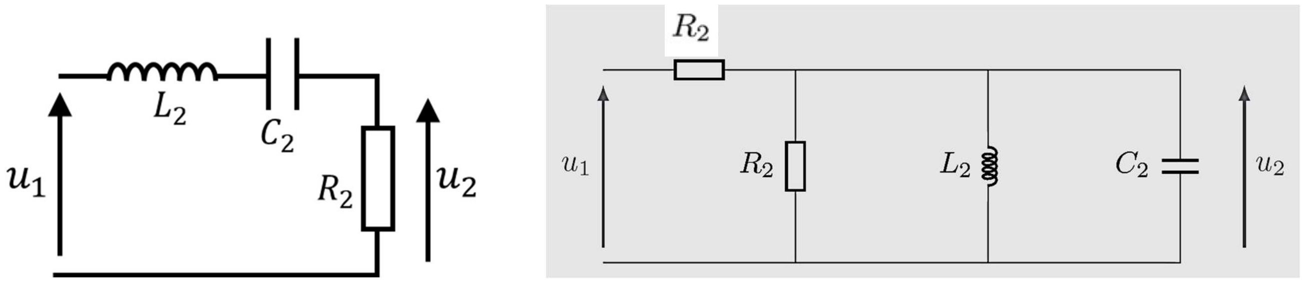


Figure 6 - Spectres

Q26. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_b). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant. On précisera les approximations faites.

E – Réalisation concrète du filtre

Le filtre sélectif (F_b) peut être réalisé grâce aux circuits ci-dessous. Répondre aux questions Q27 à Q31 pour **un seul d'entre eux** (circuit de droite si vous êtes à l'aise).



Circuit RLC série (cours) Circuit RLC un peu plus complexe

Q27. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre se met sous la forme :

$$\underline{H_2}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j.Q.\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

ω_0 est choisie de façon à être égale $2\pi.f_{ac}$.

Q28. Donner les équations des deux asymptotes (hautes fréquences et basses fréquences) du gain en décibels et de la phase de ce filtre. Préciser les valeurs de G_{dB} et φ pour $\omega = \omega_0$. Vérifier la cohérence avec la figure 4.

Q29. Grâce à la figure 4, retrouver graphiquement la valeur du facteur de qualité $Q = 18$.

Q30. Supposons R_2 connue. Quelle est l'expression de L_2 et de C_2 pour que ce filtre joue son rôle ?

Q31. On donne R_2 = 1,0 kΩ. Quelles sont les valeurs numériques de L_2 et de C_2 ?

Exercice 3 : Saut à l'élastique (d'après Bac 2011 et 2021)

Le saut à l'élastique est un loisir qui permet de ressentir des sensations fortes. Il consiste à sauter dans le « vide » à l'aide d'un élastique attaché aux chevilles. Ce saut peut se faire à partir d'un pont.

Source : www.istockphoto.com

Un saut en élastique se déroule en plusieurs phases qui sont décrites ci-dessous :

1re phase	2e phase	3e phase
		
Chute libre, l'élastique n'est pas tendu.	L'élastique commence à se tendre, le sauteur ralentit. Lorsque l'élastique est complètement étiré, le sauteur s'arrête.	L'élastique se contracte, le sauteur remonte en reprenant de la vitesse puis en ralentissant à nouveau.

Ces trois phases se répètent jusqu'à ce que le sauteur soit immobile, la durée totale du saut est de l'ordre d'une minute.

PARTIE A – On néglige les frottements !

1. Première phase du saut à l'élastique : Un peu d'adrénaline…

Considérons la première phase d'un saut à l'élastique, lorsqu'un sauteur et son équipement, de masse m = 80,0 kg, se laisse tomber sans vitesse initiale d'un pont dont le plateau se trouve à une hauteur H = 50 m du sol.
On peut considérer que le volume du sauteur et de son équipement est : V = 0,25 m^3.
Pour simplifier, on suppose que le mouvement est vertical. On assimile l'élastique à un ressort de raideur k.

<u>Données</u> : Masse volumique de l'air : ρ = 1,3 kg.m^{-3}
Accélération de la pesanteur : g = 9,8 m.s^{-2}
Longueur à vide du ressort : $\ell_0 = 8$ m
Constante de raideur du ressort : $k = 41{,}0$ N.m^{-1}

Q32. Montrer qu'il est légitime de ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède, en comparant sa valeur à celle du poids du système S, constitué par le sauteur et son équipement. ***On négligera donc cette poussée dans tout ce qui suit.***

Q33. Déterminer les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du sauteur, assimilé à son centre de gravité noté S, dans le repère (Ox ; Oz). On prendra $z = 0$ pour le sol et l'axe Oz est orienté vers le haut.

Q34. Établir que l'équation horaire du mouvement selon l'axe Oz s'écrit :

$$z(t) = -\frac{1}{2}g.t^2 + H$$

Après traitement de la vidéo d'un saut à l'aide d'un logiciel de pointage et modélisation des résultats, on obtient l'équation horaire suivante :

$$z(t) = -4{,}90.t^2 + 49.8$$

avec z exprimé en m et t exprimé en s.

Q35. La modélisation des résultats expérimentaux est-elle cohérente avec l'expression donnée à la question précédente ? Justifier.

Q36. Calculer la date à laquelle l'élastique commence à se tendre.

Q37. En déduire la valeur de la vitesse atteinte à cet instant.

Q38. Retrouver la valeur de la vitesse atteinte lorsque l'élastique commence à se tendre grâce à une approche énergétique.

2. Deuxième phase du saut à l'élastique : la tension est à son comble…

Q39. A l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal $\Delta\ell$ de l'élastique.

Pour un maximum de sensations fortes, on aimerait que le sauteur puisse venir toucher l'eau de la rivière située sous le pont.

Q40. Le saut est-il réussi ?

Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants.

Q41. Donner l'expression de la force maximale F_{max} exercée par l'élastique sur le sauteur. Le saut est-il dangereux de ce point de vue ?

PARTIE B – Les frottements ne sont plus négligés !

1. Première phase du saut à l'élastique : Toujours de l'adrénaline…

On reprend le problème mais en prenant en compte cette fois les frottements. L'ensemble des actions exercées par l'air, outre la poussée d'Archimède, sur le sauteur peut être modélisé par une force de frottement dont la valeur f est proportionnelle au carré de la vitesse acquise : $f = \mu . v^2$ où μ = 0,78 unité SI.

Q42. À partir d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité avec laquelle s'exprime la constante μ, dans le Système International.

Q43. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v_z(t)$ au cours de la chute (avant que l'élastique ne se tende) et vérifier qu'elle est de la forme :

$$\frac{dv_z(t)}{dt} + B.v_z^2(t) = A$$

où A et B sont deux constantes.

Q44. Avec quelles unités s'expriment A et B ? Déterminer A et B en fonction des données et vérifier que B = 9,8.10^{-3} unité SI.

Q45. En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} (en fonction de m, g et μ) puis calculer sa valeur.

La résolution de l'équation différentielle établie précédemment est obtenue par la méthode numérique d'Euler. Un extrait du script python utilisé est donné ci-dessous :

```
### PARAMETRES ###
g = 9.8        # intensite de la pesanteur
m = 80         # masse en kg
µ = 0.78       # coefficient de frottement

### Conditions initiales ###
v0 = 0          # vitesse initiale

### Paramètres de simulation ###
dt = 0.10
fin = 10
nb_iterations = int(fin/dt)
```

```
### Méthode d'Euler ###
liste_t = [0]
liste_v = [v0]

for i in range(nb_iterations-1):
    t = liste_t[i]
    v = liste_v[i]

    t_suivant =        Ligne à compléter
    v_suivant =        Ligne à compléter

    liste_t.append(t_suivant)
    liste_v.append(v_suivant)
```

Q46. Quel est le pas de simulation Δt utilisé pour effectuer les calculs de $v_z(t)$? La valeur choisie est-elle judicieuse ? Justifier.

Q47. Compléter les deux lignes incomplètes dans le script. Les noter sur votre copie.

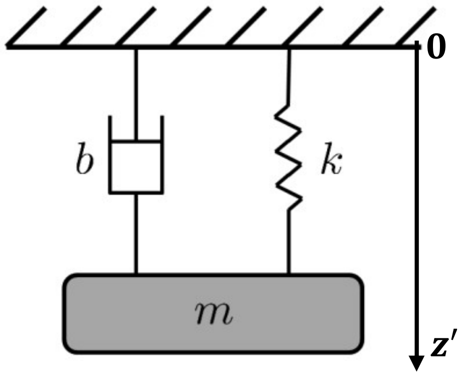
L'application de la méthode d'Euler donne une valeur de vitesse de 12,2 m.s^{-1} au moment où l'élastique se tend.

Q48. En déduire le travail des forces de frottements lors de la première phase du saut.

2. Troisième phase du saut à l'élastique : des oscillations…

Dans la troisième phase du mouvement, le sauteur est toujours modélisé par un point matériel soumis à la force de rappel de l'élastique de constante de raideur k.

La dissipation de l'énergie dans le ressort est prépondérante sur la dissipation due aux frottements de l'air (on néglige donc ceux-ci) : on modélise l'énergie dissipée dans le ressort par une force de frottement de la forme $\overrightarrow{f_d} = -b.\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du sauteur.



Pour simplifier la description on change de repère : on fixe l'origine au point d'attache du ressort et on prend un axe Oz' orienté vers le bas.

Q49. Déterminer la position d'équilibre z'_{eq} du sauteur à la fin de son saut en fonction de m, g, k et ℓ_0.

On pose $Z(t) = z'(t) - z'_{eq}$.

Q50. Montrer que l'équation différentielle gouvernant $Z(t)$ pour $t > 0$ ($t = 0$ correspondant au début de la troisième phase du saut) peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dZ}{dt} + {\omega_0}^2.Z = 0$$

et exprimer les constantes ω_0 et Q.

Le sauteur oscille verticalement en effectuant 4 « allers et retours » avant de se stabiliser.

Q51. Comment qualifie-t-on de telles oscillations ? Que peut-on dire du facteur de qualité Q ?

Q52. Quelle est l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres ?

Les conditions initiales sont $Z(t = 0) = \mathrm{Z}_0$ et $v(0) = 0$.

Q53. Donner l'allure de la courbe $Z = f(t)$.

Q54. Montrer que l'expression de $Z(t)$, solution de l'équation différentielle, se met sous la forme :

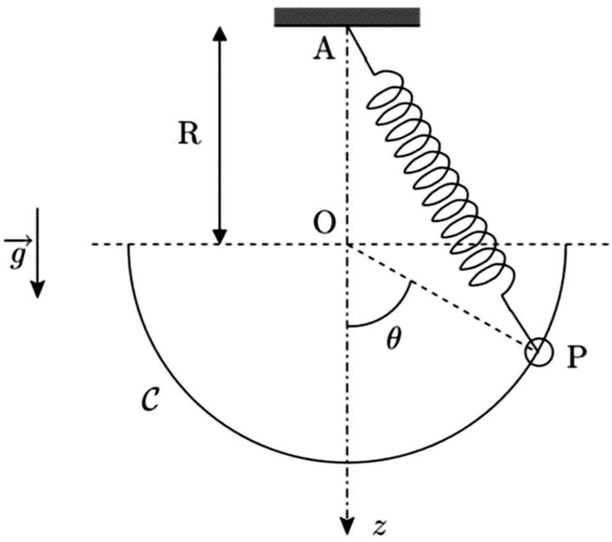
$$\mathrm{Z}(t) = e^{-\lambda.t}.(A.\cos(\Omega.t) + B.\sin(\Omega.t))$$

Exprimer $\Omega, \lambda, A\ et\ B$ en fonction de Q, ω_0 et Z_0.

Q55. Estimer l'ordre de grandeur du facteur de qualité Q. En déduire la valeur de b. Préciser l'unité de ce coefficient.

Q56. Estimer la durée de la phase trois.

Exercice 1bis : Équilibre et stabilité d'une perle



Une perle P de masse m, assimilable à un point matériel, est enfilée sur un demi-cercle C de centre O et de rayon R, fixé dans un plan vertical tel que son diamètre soit horizontal et que sa concavité soit tournée vers le haut.

On note (Oz) la verticale descendante passant par le centre de ce demi-cercle. La perle peut coulisser sans frottement sur le demi-cercle. Elle est attachée à l'extrémité du ressort de constante de raideur k et longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est fixée en un point A situé sur la verticale (Oz), à une distance R au-dessus du point O égale au rayon du demi-cercle.

Le problème consiste à étudier l'existence et la stabilité d'éventuelles positions d'équilibre de la perle sur C.

Le référentiel $\mathcal{R}$ auquel est lié C est supposé galiléen. La position courante de la perle est repérée par l'angle formé par le segment OP avec la verticale descendante (Oz). Le champ de pesanteur est noté $\vec{g}$.

A – Énergie potentielle de la perle

Q57. Faire le bilan des forces subies par la perle. L'énergie mécanique de la perle est-elle constante ?

Q58. Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} de la perle en fonction de θ et des données, sachant que l'on fixe une énergie potentielle nulle à l'altitude du point O.

Q59. Démontrer la relation : $AP = 2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Q60. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique E_{pe} de la perle en fonction de la longueur du ressort et des données. En déduire alors une expression en fonction de θ et des données. On fixe une énergie potentielle nulle pour un allongement nul du ressort.

Q61. En déduire l'expression suivante de l'énergie potentielle totale Ep de la perle :

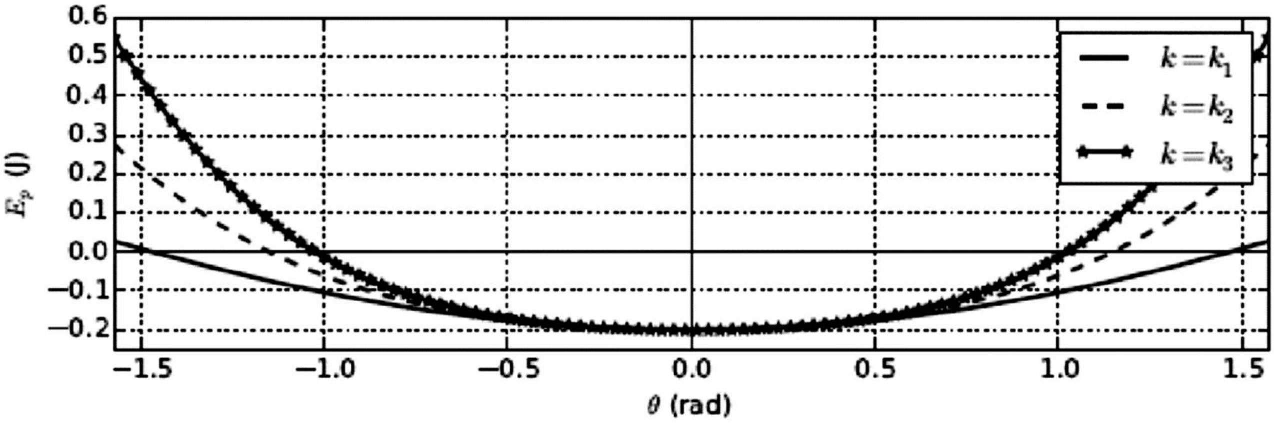
$$E_p = -m.g.R.\cos(\theta) + \frac{1}{2}.k\left(2R.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \ell_0\right)^2$$

B – Existence et stabilité des positions d'équilibre

Données : m = 50 g, g = 9,81 m.s^{-1}, R = 40 cm.

On a représenté ci-dessous les graphes donnant l'énergie potentielle totale E_p de la perle en fonction de l'angle θ variant de -90° à 90°, pour les longueurs à vide ℓ_0 prenant les valeurs $2.R$, R et $1{,}5.R$ et pour des constantes de raideur k prenant les valeurs k_1 = 1,0 N/m, k_2 = 10 N/m et k_3 = 20 N/m.

1 - Cas où $\ell_0 = 2R$:

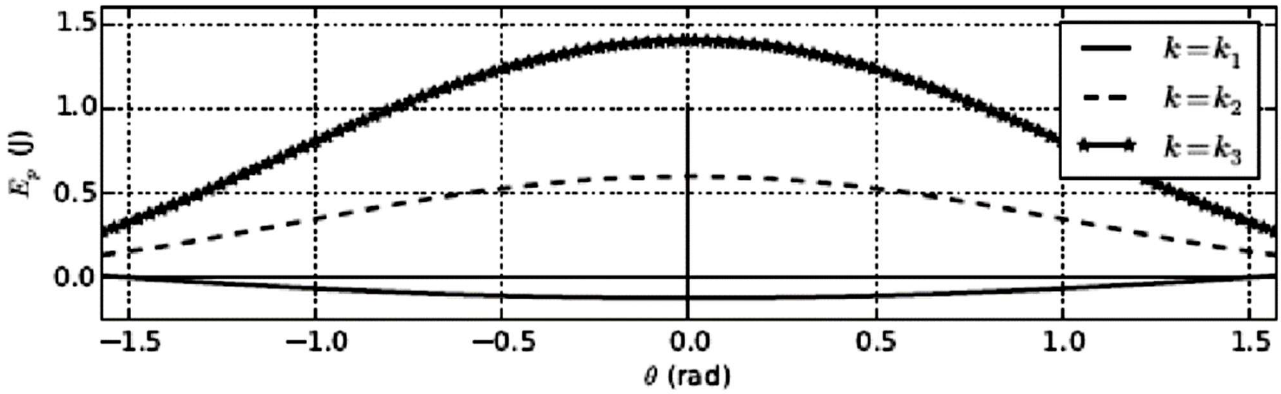


Q62. Montrer, par le calcul, que la valeur de l'énergie potentielle $E_p(0)$ est indépendante de la constante de raideur k du ressort et calculer sa valeur.

Q63. A partir des courbes $E_p(\theta)$ identifier la ou les position(s) d'équilibre et dire si elle(s) est(sont) stable(s) ou instable(s).

Q64. Vérifier les résultats de la question précédente par le calcul en utilisant l'expression de $E_p(\theta)$.

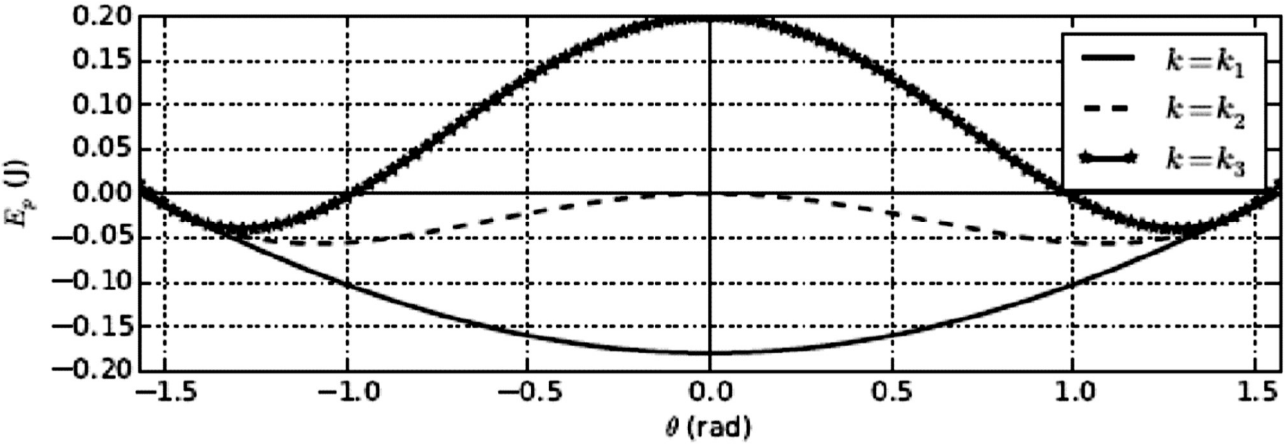
2 - Cas où $\ell_0 = R$:



Q65. Graphiquement, que remarque-t-on concernant la position θ = 0 ? Discuter suivant la valeur de k.

Q66. Retrouver ces résultats par le calcul en utilisant l'expression de $E_p(\theta)$.

3 - Cas où $\ell_0 = 1,5.R$:



Q67. Quelle différence note-t-on comparativement au cas $\ell_0 = R$? (On ne demande pas de calcul dans cette partie).