

Correction

Exercice 2 : Conversion d'énergie

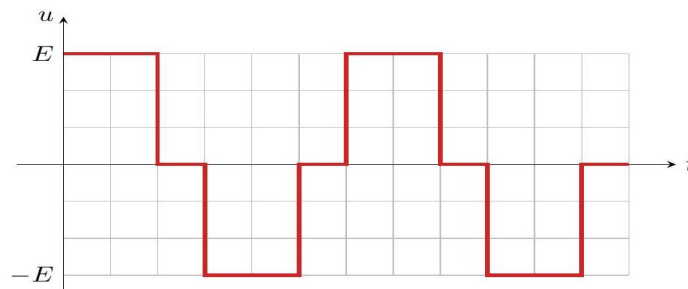
EPITA 2025

D'après le corrigé proposé par Fabien BAUDRIBOS.

Partie A - Conversion de la tension continue délivrée par un module photovoltaïque en une tension alternative

Tension de sortie de l'onduleur

Q1.



Q2. La tension de sortie de l'onduleur est de moyenne nulle, donc sa composante continue est nulle, ce qui exclut le spectre (1). De plus, elle est de fréquence f_0 donc toutes les harmoniques présentes dans son spectre sont à des fréquences multiples de f_0 , ce qui exclut le spectre (3). Par élimination, on en déduit que le spectre de u est le spectre (2).

Filtrage par la cellule R,L

Q3. Pour que la tension devienne sinusoïdale, le filtre doit couper les harmoniques et ne transmettre que le fondamental. Un filtrage passe-bas ou passe-bande convient donc.

Q4. Par un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{V}{\underline{U}} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

ce qui permet d'identifier

$$H_0 = 1 \text{ et } \omega_c = \frac{R}{L}.$$

Q5. Pour transmettre au mieux le fondamental mais atténuer les harmoniques, la fréquence de coupure doit être choisie de l'ordre de f_0 .

Calcul numérique de la tension lissée

Q6. Première méthode : avec les lois de Kirchoff. D'après la loi des mailles et les lois de comportement des dipôles,

$$u = v + u_L = v + L \frac{di}{dt} = v + \frac{L}{R} \frac{dv}{dt}$$

ce qui s'écrit bien

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{u}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_c}.$$

- Deuxième méthode : avec la fonction de transfert. Par un produit en croix,

$$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) \underline{V} = \underline{U}$$

et en faisant correspondre une multiplication par $j\omega$ avec une dérivation,

$$v + \frac{1}{\omega_c} \frac{dv}{dt} = u$$

ce qui s'écrit bien

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{u}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{L}{R}$$

Q7. Le schéma d'Euler appliqué à l'équation différentielle donne

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + \frac{v_n}{\tau} = \frac{u_n}{\tau} \quad \text{soit} \quad v_{n+1} - v_n + \frac{\Delta t}{\tau} v_n = \frac{\Delta t}{\tau} u_n$$

et enfin

$$v_{n+1} = \frac{\Delta t}{\tau} u_n + \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) v_n$$

Q8. Toutes les variables étant déjà supposées définies hormis u , le code peut s'écrire de l'une ou l'autre des façons suivantes :

- Première méthode : on initialise v à une liste directement de la bonne taille dont on remplit les éléments par une boucle for.

```
v = [0 for n in range(len(u))] # 0 ou n'importe quoi d'autre !
v[0] = 0
for n in range(len(u)-1):
    v[n+1] = dt/tau * u[n] + (1 - dt/tau) * v[n]
```

- Deuxième méthode : on initialise v à une liste ne contenant que la condition initiale, et on ajoute les autres éléments au fur et à mesure.

```
v = [0]
for n in range(len(u)-1):
    v.append(dt/tau * u[n] + (1 - dt/tau) * v[n])
```

Q9. La valeur la plus adaptée est $\tau = T_0$, qui correspond à une tension de sortie à peu près sinusoïdale et d'amplitude non négligeable. En revenant à la pulsation de coupure,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} \quad \text{soit} \quad \omega_c = f_0 \quad \text{donc} \quad f_c = \frac{f_0}{2\pi}$$

Cette valeur est conforme à la discussion de la question 5.

Q10. Si τ est trop petit, c'est-à-dire f_c trop grande, la tension n'est plus sinusoïdale car les harmoniques ne sont pas assez atténuées par le filtre. Si τ est trop grand, c'est-à-dire f_c trop petite, la tension est d'amplitude trop faible car le fondamental est lui aussi fortement atténué par le filtre.

Partie B - Transformation de la tension de sortie en très haute tension

Inductance propre d'un solénoïde infini

Q11. Soit M un point quelconque. Le plan $\Pi_s = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc

$$\vec{B}(M) = B_z(M) \vec{e}_z$$

Par ailleurs, la distribution de courant est approximée comme étant invariante par translation le long de l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe, d'où

$$\vec{B}(M) = B_z(r) \vec{e}_r$$

Q12. La spire est circulaire de rayon R et de vecteur normal $\vec{e}_z$, donc

$$\varphi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \mu_0 \frac{N}{H} i \times \pi R^2$$

Le solénoïde comptant N spires,

$$\phi_p = N\varphi = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{H} i$$

d'où on déduit l'inductance propre $L = \phi_p / i$

$$L = \mu_0 N^2 \frac{\pi R^2}{H}$$

Inductance mutuelle des deux solénoïdes imbriqués

Q13. Les spires des deux solénoïdes sont orientées dans le même sens, donc comme précédemment

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1}{H} i_1 \times \pi R^2$$

d'où

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \varphi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{H} \pi R^2 i_1$$

Q14. Par définition,

$$M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} \text{ donc } M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{H} \pi R^2$$

Rapport de transformation

Q15. Les deux bobines étant couplées,

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Si l'impédance Z est infinie alors $i_2 = 0$, donc

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Q16. En éliminant la dérivée de i_1 entre ces deux équations,

$$u_2 = M \times \frac{u_1}{L_1} \text{ d'où } \frac{u_2}{u_1} = \frac{M}{L_1}.$$

En reprenant les expressions établies aux questions 12 et 14, $m = \frac{N_2}{N_1}$

Q17. D'après ce qui précède,

$$N_2 = \frac{U_2}{U_1} N_1 = 500000 \text{ spires.}$$

Partie C - Stockage gravitaire d'énergie

Q18. Une source d'énergie est dite intermittente et non pilotable lorsqu'elle ne produit pas de façon constante et qu'il est impossible de choisir les moments de production. Le nucléaire, le gaz, le pétrole, le charbon, l'hydraulique sont des sources d'énergie pilotables. La géothermie est une source d'énergie constante mais non pilotable. L'énergie éolienne ou l'énergie marémotrice sont des énergies intermittentes et non pilotables.

Q19. On peut citer les batteries électrochimiques (énergie stockée sous forme chimique), les barrages STEP (Station de Transfert d'Énergie par Pompage, énergie stockée sous forme d'énergie potentielle de pesanteur), les volants d'inertie (énergie cinétique), etc.

Fonctionnement du système

Q20. Le bloc de béton est soumis à son poids $mg\vec{e}_z$ et à la force de tension du fil $-T\vec{e}_z$. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le PFD s'écrit en projection

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T$$

Q21. Cette équation est issue du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oy) appliquée à l'alternateur (= toutes les pièces en rotation). Le terme RT représente le moment de la force de tension du fil appliquée sur l'alternateur. Il s'écrit ainsi car cette force de norme T a un bras de levier R et tend à faire tourner le système en sens direct autour de l'axe (Oy) , d'où un signe positif.

Étude de la phase de démarrage

Q22. Comme $\Gamma_{\text{alt}} = 0$ et puisque $v = R\Omega$ alors d'après le TMC

$$\frac{J}{R} \frac{dv}{dt} = RT$$

et en multipliant le PFD par R ,

$$mR \frac{dv}{dt} = Rmg - RT.$$

En sommant ces deux équations,

$$\left(mR + \frac{J}{R}\right) \frac{dv}{dt} = Rmg \text{ soit } \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right) \frac{dv}{dt} = g$$

qui donne bien

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{J}{mR^2}} = a_0$$

Q23. La position et la vitesse initiales étant nulles,

$$v(t) = a_0 t \text{ et } z(t) = a_0 \frac{t^2}{2}$$

Q24. D'après ce qui précède,

$$v(t_0) = R\Omega_0 = a_0 t_0 \text{ soit } t_0 = \frac{R\Omega_0}{a_0}$$

et ainsi

$$z(t_0) = \frac{a_0}{2} \left(\frac{R\Omega_0}{a_0} \right)^2 = \frac{a_0}{2} \times \frac{R^2 \Omega_0^2}{a_0^2} \text{ soit } z(t_0) = \frac{R^2 \Omega_0^2}{2a_0}.$$

Étude de la phase de production proprement dite

Q25. En régime permanent, les deux équations de fonctionnement s'écrivent

$$J \frac{d\Omega}{dt} = 0 = RT - \frac{\mathcal{P}_e}{\Omega_0} \text{ et } m \frac{dv}{dt} = 0 = mg - T$$

On a donc $T = mg$ et puisque $\Omega_0 = v_0/R$, on en déduit $mg - \frac{R' \mathcal{P}_e}{v_0} = 0$ d'où $v_0 = \frac{\mathcal{P}_e}{mg}$

Q26. Numériquement, en approximant $g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$

$$v_0 = \frac{250 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3 \times 10} = \frac{25}{50} \text{ d'où } v_0 = 0,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

D'après la question 24,

$$t_0 = \frac{v_0}{a_0} = \frac{0,5}{1,5} \text{ soit } t_0 \simeq 0,3 \text{ s}$$

et

$$z(t_0) = \frac{v_0^2}{2a_0} = \frac{0,5^2}{2 \times 1,5} = \frac{0,25}{3} \text{ soit } z(t_0) \simeq 0,1 \text{ m}$$

Q27. En supposant la phase de démarrage négligeable devant la hauteur totale de chute ($z(t_0) \ll H$), on peut estimer la durée totale de la chute à

$$\Delta t = \frac{H}{v_0} = 14 \text{ s.}$$

Cette durée semble bien courte pour pouvoir participer efficacement à la régulation de l'intermittence de l'énergie photovoltaïque ... mais il ne s'agit que d'un démonstrateur.

Vers une installation à plus grande échelle

Q28. L'énergie totale $\mathcal{E}$ mobilisable par le dispositif est l'énergie potentielle totale des blocs, soit

$$\mathcal{E} = m' g H'.$$

Numériquement,

$$\mathcal{E} = 12 \cdot 10^6 \times 10 \times 750 = (4 \times 3 \times 10^6) \times 10 \times \left(\frac{3}{4} \times 10^3 \right) \text{ donc } \mathcal{E} = 9 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

Q29. Par définition,

$$1\text{kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Ainsi, le dispositif permet de stocker une énergie équivalente à la consommation journalière de **2500** foyers, hors chauffage et eau chaude, ce qui correspond à une petite ville.

Q30. L'énergie étant libérée avec une puissance de 4 MW, la durée de fonctionnement du dispositif est

$$\Delta t' = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}_{\max}} = \frac{9 \cdot 10^{10} \text{ J}}{4 \cdot 10^6 \text{ W}} = 2,25 \cdot 10^4 \text{ s soit } \Delta t' \simeq 6 \text{ heures}$$

Q31. Le dispositif peut contribuer à lisser les fluctuations journalières d'ensoleillement (alternance jour-nuit), mais sa capacité de stockage est trop faible pour qu'il puisse avoir un impact notable sur le lissage des fluctuations météorologiques (semaine pluvieuse) ni des variations saisonnières.