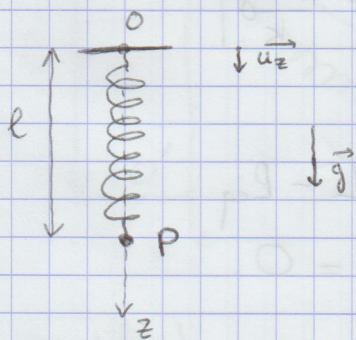


Exercice :

Oscillateur mécanique.

Partie A : Ressort vertical



• système : { point matériel de masse m }

• référentiel : terrestre supposé galiléen.

• bilan des forces :

• poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot g \cdot \vec{u}_z$

• force de rappel (loi de Hooke) :

$$\vec{F}_r = -k(l - l_0) \cdot \vec{u}_z$$

Q1 : Par définition : $dE_{p,k} = -\delta W(\vec{F}_r)$ ou encore $\vec{F}_r = -\vec{\text{grad}}(E_{p,k}) = -\frac{dE_{p,k}}{dl}$

$$\Rightarrow E_{p,k}(l) - E_{p,k}(l_0) = \int_{l_0}^l dE_{p,k} = -\int_{l_0}^l -k(l - l_0) dl = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2$$

de plus $E_{p,k}(l_0) = 0$ (choix imposé par l'énoncé) $\Rightarrow \boxed{E_{p,k} = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2}$

Q2 : De même $dE_{p,p} = -\delta W(\vec{P}) = -\vec{P} \cdot d\vec{l}$ avec $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$

$$\Rightarrow dE_{p,p} = -m \cdot g \cdot dz$$

$$\Rightarrow E_{p,p}(z) - E_{p,p}(0) = \int_0^z dE_{p,p} = \int_0^z (-m \cdot g \cdot dz) = -m \cdot g \cdot z$$

or $E_{p,p}(0) = 0$ (choix imposé par l'énoncé) $\Rightarrow E_{p,p}(z) = -m \cdot g \cdot z$

et puisque $z = l \Rightarrow \boxed{E_{p,p}(l) = -m \cdot g \cdot l}$

Q3 : $E_m = E_c + E_{p,k} + E_{p,p}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 - m \cdot g \cdot l$$

or $v = \dot{l} \Rightarrow \boxed{E_m = \frac{1}{2} m \cdot \dot{l}^2 + \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 - m \cdot g \cdot l}$

Q4 : Théorème de la puissance mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non conservative}})$

or ici le système n'est soumis qu'à des forces conservatives

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \cdot \dot{l} \cdot \ddot{l} + k(l - l_0) \cdot \dot{l} - m \cdot g \cdot \dot{l} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{l} + \frac{k}{m} \dot{l} = \frac{k}{m} (l_0 + \frac{m \cdot g}{k})}$$

Q5: • Solution de l'équation de la forme:

$$l(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \sin(\omega_0 t) + l_{eq}$$

$$\text{avec } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}}} \text{ et } \boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{m \cdot g}{k}}$$

Avec les conditions initiales:

$$l(0) = L = A + l_{eq} \Rightarrow A = L - l_{eq}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow \dot{l}(0) = B \cdot \omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{l(t) = (L - l_{eq}) \cdot \cos(\omega_0 t) + l_{eq}}$$

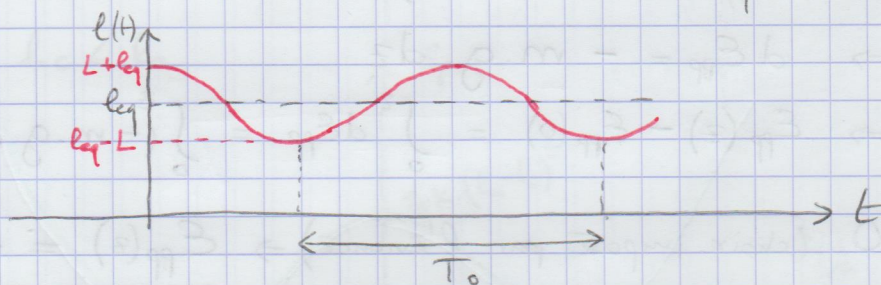
• Pour que P ne heurte pas le support fixe, il faut $l(t) > 0$

$$\Rightarrow (L - l_{eq}) \cdot \cos(\omega_0 t) + l_{eq} > 0$$

$$\text{or au minimum } \cos(\omega_0 t) = -1 \Rightarrow -(L - l_{eq}) + l_{eq} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L < 2 l_{eq}}$$

• Le mouvement est un mouvement harmonique (sinusoïdal) vertical.

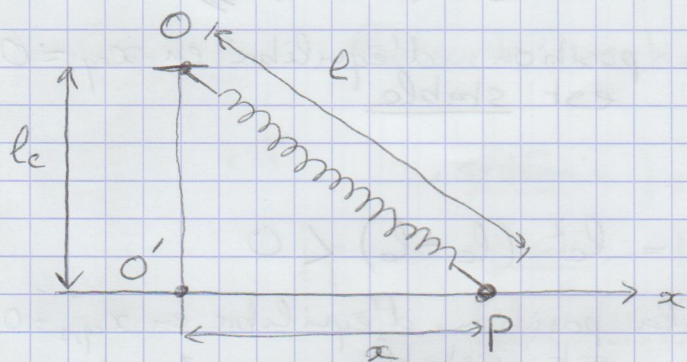


• Période: $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \times \sqrt{\frac{m}{k}}}$

$$\text{AN: } T_0 = 2 \sqrt{\frac{0,300}{9300}} = 2 \text{ s}$$

$$\left(\frac{\pi^2}{k} = \frac{1}{9300} \right)$$

Partie B : Le point P n'est plus fixé.



Q6

$$E_p = E_{p,k} + E_{p,p} \\ = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + 0$$

$E_{pp}(P) = E_{pp}(O') = 0$
car P et O' à la même altitude

en utilisant Pythagore pour l

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (\sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0)^2$$

Q7 : position stable si $\frac{dE_p}{dx} = 0$

1 seul degré de liberté : suivant O'x.

$$\hookrightarrow \frac{dE_p}{dx} = k \cdot (\sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0) \times \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{l_c^2 + x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = l_0^2 - l_c^2$$

Il faut distinguer deux cas :

• si $l_c \geq l_0$ alors il y a une seule position d'équilibre en $x_{eq} = 0$

• si $l_c < l_0$ alors il y a 3 positions d'équilibre en $x_{eq,1} = 0$, $x_{eq,2} = \sqrt{l_0^2 - l_c^2}$ et $x_{eq,3} = -\sqrt{l_0^2 - l_c^2}$

Stabilité : la position est stable si $\frac{d^2E_p(x_{eq})}{dx^2} > 0$

$$\frac{dE_p}{dx} = k \cdot x - \frac{k \cdot x \cdot l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = k - \frac{k \cdot l_0 \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2} - k \cdot x \cdot l_0 \cdot \frac{x}{\sqrt{l_c^2 + x^2}}}{l_c^2 + x^2}$$

$$= \frac{k(l_c^2 + x^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2} - k \cdot l_0 (l_c^2 + x^2) + k x^2 \cdot l_0}{(l_c^2 + x^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2}}$$

$$= k \cdot \frac{((l_c^2 + x^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0 \cdot l_c^2)}{(l_c^2 + x^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2}}$$

← dénominateur toujours positif.

cas ① $l_c \geq l_0$:

$$x_{eq}=0 \Rightarrow (l_c^2 + 0^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + 0^2} - l_0 \cdot l_c^2 = l_c^2 \cdot (l_c - l_0) \geq 0$$

→ la position d'équilibre en $x_{eq}=0$ est stable

cas ② $l_c < l_0$

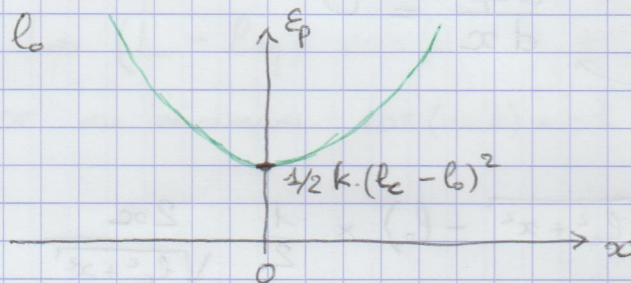
$$x_{eq}=0 \Rightarrow (l_c^2 + 0^2) \cdot \sqrt{l_c^2 + 0^2} - l_0 \cdot l_c^2 = l_c^2 \cdot (l_c - l_0) < 0$$

→ la position d'équilibre en $x_{eq,1}=0$ est instable

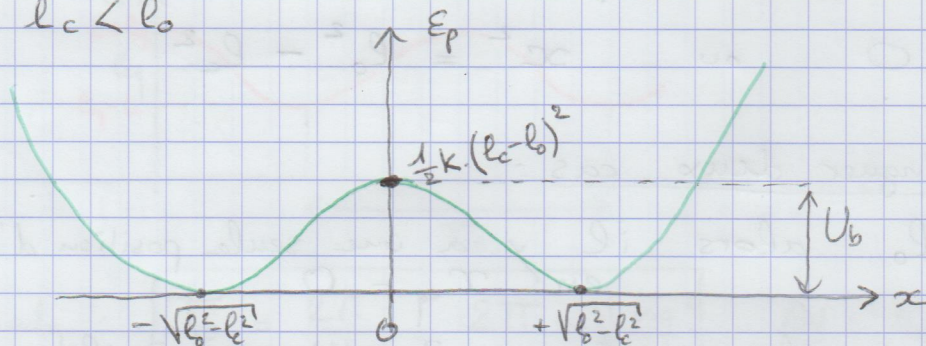
$$x_{eq} = \pm \sqrt{l_0^2 - l_c^2} \Rightarrow (l_c^2 + (l_0^2 - l_c^2)) \cdot \sqrt{l_c^2 + l_0^2 - l_c^2} - l_0 l_c^2 = l_0 (l_0^2 - l_c^2) > 0$$

→ les positions d'équilibre en $x_{eq,2}$ et $x_{eq,3}$ sont stables

cas 1 : $l_c \geq l_0$



cas 2 : $l_c < l_0$



Q8 On peut parler de barrière de potentiel dans le cas ② $l_c < l_0$.

$$U_b = E_p(0) - E(x_{eq,2}) = \frac{1}{2} k \cdot (l_0 - l_c)^2$$

Q9 : En appliquant le théorème de la puissance mécanique (pas de force non conservatrice appliquée sur le système) sur l'axe Ox :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} \cdot x - \frac{k \cdot x \cdot l_0 \cdot \sqrt{l_c^2 + x^2}}{l_c^2 + x^2} - \frac{k x^2 \dot{x}}{\sqrt{l_c^2 + x^2}}$$

$$(m \cdot \ddot{x} + k) \cdot (l_c^2 + x^2) -$$

Q9: En appliquant le théorème de la puissance mécanique:

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \text{car pas de travaux de force non conservative (la réaction du support ne travaille pas)}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0 \quad (\text{avec } E_c = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2)$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x} + k \cdot (\sqrt{l_c^2 + x^2} - l_0) \cdot \frac{2 \cdot x \dot{x}}{2 \sqrt{l_c^2 + x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + x^2}} \right) = 0}$$

Remarque: ce n'est pas une ED linéaire!

- Le terme $-\frac{dE_p}{dx}(x)$ représente la composante de la force de rappel suivant l'axe $O'x$.

Q10:

$$\begin{cases} \frac{du_0(t)}{dt} = u_1(t) \\ \frac{du_1(t)}{dt} = -k \cdot m \cdot u_0(t) \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_0^2(t)}} \right) \end{cases}$$

Euler explicite: $\frac{du}{dt} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u_{0,n+1} - u_{0,n}}{\Delta t} = u_{1,n} \\ \frac{u_{1,n+1} - u_{1,n}}{\Delta t} = -k \cdot m \cdot u_{0,n} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_{0,n}^2}} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{0,n+1} = u_{0,n} + u_{1,n} \cdot \Delta t \\ u_{1,n+1} = u_{1,n} - k \cdot m \cdot u_{0,n} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + u_{0,n}^2}} \right) \cdot \Delta t \end{cases}$$

$u_{0,0}$ correspond à la position initiale
 $u_{1,0}$ correspond à la vitesse initiale

Q11: Les 2 mouvements sont périodiques mais seul le cas B correspond à un mouvement quasi-sinusoidal.

Q12: Pour le cas B, on a un mouvement quasi-sinusoidal: le système oscille autour de sa position d'équilibre stable.

Puisque $l_0 > l_c$, cette position d'équilibre stable correspond à $x_{eq,2} = \sqrt{l_0^2 - l_c^2}$

On a donc $\boxed{\langle x(t) \rangle = \sqrt{l_0^2 - l_c^2}}$

Pour trouver la période, il faut utiliser l'équation du mouvement et faire un D.L. en $x = x_{eq,2}$.

On pose $x = x_{eq,2} + u$ où u est l'écart à la position d'équilibre.

On a alors:

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} (x_{eq} + u) \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + (x_{eq} + u)^2}} \right) = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} (x_{eq} + u) \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l_c^2 + (l_c^2/l_0^2) + 2x_{eq}u + u^2}} \right) = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} (x_{eq} + u) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x_{eq}u}{l_0^2} + \frac{u^2}{l_0^2}}} \right) = 0$$

D.L.
de $\sqrt{1+x}$
en 0

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} (x_{eq} + u) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{x_{eq}u}{l_0^2}} \right) = 0$$

terme du 2^{ème} ordre
négligeable
($\frac{u}{l_0} \ll 1$)

D.L.
de $\frac{1}{1+x}$
en 0

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} (x_{eq} + u) \left(1 - \left(1 - \frac{x_{eq}u}{l_0^2} \right) \right) = 0$$

on ne garde que
les termes
du 1^{er} ordre
en u

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} \frac{x_{eq}^2}{l_0^2} u = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^2 \right)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^2}$$

$$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^2}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{l_c}{l_0} \right)^2}}}$$

AN:

$$\left\{ \begin{aligned} T_2 &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,2}{1}\right)^2}} \approx 2 \text{ s.} \\ x_{eq} &= \sqrt{1 - 0,2^2} \underset{\substack{\uparrow \\ 0,2^2 \ll 1}}{\approx} 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 = 0,98 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

Ces 2 valeurs sont en accord avec le graphe.

Les approximations faites semblent donc valables.