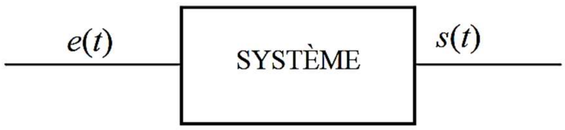
Régime transitoire des systèmes du 1er ordre

Plan du cours

1. Vocabulaire

Définitions : Système linéaire

Un système est dit ***linéaire*** si le ***théorème de superposition*** s'applique :



Si l'entrée $\boldsymbol{e_1}(t)$ donne la sortie $\boldsymbol{s_1}(t)$
et l'entrée $\boldsymbol{e_2}(t)$ donne la sortie $\boldsymbol{s_2}(t)$,
alors l'entrée $e(t) = \lambda.e_1(t) + \mu.e_2(t)$ donne la sortie $s(t) = \lambda.s_1(t) + \mu.s_2(t)$,
quelles que soient les excitations $\boldsymbol{e_1}(t)$ et $\boldsymbol{e_2}(t)$, et les scalaires réels λ et μ.

La relation entrée – sortie s'exprime alors comme par une équation différentielle linéaire faisant intervenir les dérivées successives par rapport au temps des signaux d'entrée et de sortie.

Système d'ordre 1 : La dérivée la plus élevée intervenant des l'équation différentielle du système est une dérivée première par rapport au temps.

Système d'ordre 2 : La dérivée la plus élevée intervenant des l'équation différentielle du système est une dérivée seconde par rapport au temps.

Définitions : Régime permanent vs. régime transitoire

Régime permanent : lorsque la sortie d'un système a atteint une valeur constante, ou lorsque qu'elle a atteint un régime périodique.

Régime transitoire : lorsque la sortie d'un système évolue, pendant un certain temps, entre deux régimes permanents.

Définitions : Régime forcé vs. régime libre

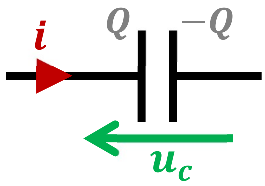
Régime forcé : lorsque l'entrée du système est maintenue à une valeur non nulle. Cette valeur peut être constante, peut être harmonique (on parle alors de régime sinusoïdal forcé, RSF), ou peut être une fonction périodique (un créneau par exemple).

Régime libre : lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie, donc lorsque l'entrée du système est nulle ou devient nulle : $e(t) = 0$.

2. Condensateur et bobine

2.1. Le condensateur

2.1.1. Description



Un condensateur est un composant constitué de deux armatures métalliques en regard séparées par un isolant.

Propriété : condensateur en régime continu

En régime continu, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert.

Il est possible d'accumuler des charges électriques sur ces armatures. Le condensateur étant toujours électriquement neutre, la charge électrique positive $+\boldsymbol{Q}$ sur une armature est toujours compensée par l'existence d'une charge électrique négative $-\boldsymbol{Q}$ sur l'autre armature.

2.1.2. Lien charge stockée – tension

La charge accumulée $\boldsymbol{Q}$ (en coulomb) est proportionnelle à la tension $\boldsymbol{u_c}$ (en volt) :

$$\boxed{\boldsymbol{Q = C.u_c}}$$

Le coefficient de proportionnalité $\boldsymbol{C}$ s'appelle la ***capacité*** du condensateur. Elle s'exprime en farad (F). Elle caractérise l'aptitude du condensateur à stocker des charges électriques lorsqu'il est soumis à une tension.

2.1.3. Loi de comportement

La charge électrique $\boldsymbol{dQ}$ qui s'accumule sur une armature durant un temps $\boldsymbol{dt}$ très court est directement liée à l'intensité du courant instantané $\boldsymbol{i}$ (supposé constant pendant $\boldsymbol{dt}$) :

$$\boldsymbol{dQ = i.}\mathrm{dt}$$

En réécrivant cette relation, on constante que le courant électrique $\boldsymbol{i}$ correspond à la dérivée de la charge accumulée Q par rapport au temps :

$$\boldsymbol{i = \frac{dQ}{dt}}$$

Puisque la charge électrique sur les armatures dépend de la tension on peut écrire :

$$\boxed{\boldsymbol{i = C.}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u_c}}{\mathrm{d}t}}$$

Propriété : Continuité de la tension aux bornes du condensateur

La tension $\boldsymbol{u_c}(t)$ aux bornes du condensateur est obligatoirement continue.

2.1.4. Energie stockée

La puissance reçue par le condensateur vaut :

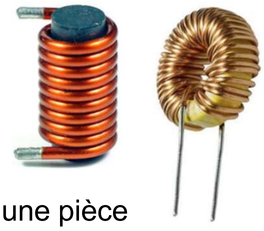
$$\boldsymbol{\mathcal{P}_c = u_c.i = C.u_c.}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u_c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{.C.u_c}^2\right)}{\mathrm{d}t}$$

Or la puissance reçue $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathrm{c}}$ correspond à la variation d'énergie stockée par unité de temps.
Le condensateur stocke de l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{C}}$ sous forme électrostatique. Cette énergie dépend de la tension $\boldsymbol{u_c}$ et vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}.C.u_c{}^2}$$

2.2. La bobine

2.2.1. Description



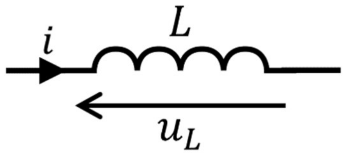
Une bobine est constituée d'un enroulement de fil conducteur.

- Chaque boucle de fil est appelée « spire ».
- L'espace au milieu de ces spires s'appelle le noyau. Il peut être vide ou inclure une pièce en matériau ferromagnétique.
- Les enroulements successifs sont isolés les uns des autres par la gaine du fil ou par un vernis appliqué en surface du fil.

Propriété : bobine en régime continu

En régime continu, la bobine est équivalente à un fil.

2.2.2. Loi de comportement



La tension aux bornes de la bobine idéale est proportionnelle à la dérivée temporelle du courant qui la traverse :

$$\boxed{\boldsymbol{u_L = L.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}}$$

Le coefficient $\boldsymbol{L}$ caractérise la bobine et s'appelle l'***inductance*** *(propre)* de la bobine. Il s'exprime en henry (H).

Propriété : Continuité du courant électrique traversant la bobine

L'intensité du courant $\boldsymbol{i}(t)$ traversant la bobine est obligatoirement continue.

Remarque : pour la bobine réelle, on ajoute en série une résistance $\boldsymbol{r}$.

2.2.3. Energie stockée

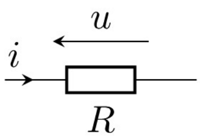
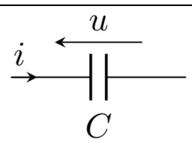
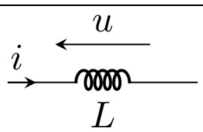
La puissance reçue par la bobine vaut :

$$\boldsymbol{\mathcal{P}_\mathrm{L} = u_L.i = L.i.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}.L.i^2\right)}$$

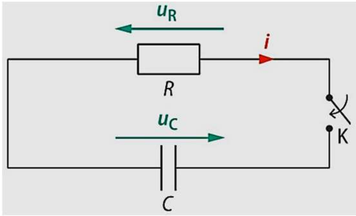
Or la puissance reçue $\mathcal{P}_\mathrm{L}$ correspond à la variation d'énergie stockée par unité de temps.
La bobine stocke de l'énergie $\mathcal{E}_\mathrm{L}$ sous forme magnétique. Cette énergie dépend du courant $\boldsymbol{i}$ et vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{L} = \frac{1}{2}.L.i^2}$$

2.3. Résumé

Dipôle	Schéma	Loi de comportement	Energie stockée	Ordre de grandeur
Conducteur ohmique		**Loi d'Ohm** $u = R.i$ Résistance $\boldsymbol{R}$ en ohm (Ω)	Effet Joule Dissipée sous forme de chaleur	1 Ω à plusieurs $M\Omega$
Condensateur		$i = C.\frac{du}{dt}$ Capacité $\boldsymbol{C}$ en farad (F)	$\mathcal{E}_\mathrm{C} = \frac{1}{2}.C.u^2$	100 nF à 100 mF
Bobine		$u = L.\frac{di}{dt}$ Inductance $\boldsymbol{L}$ en henry (H)	$\mathcal{E}_\mathrm{L} = \frac{1}{2}.L.i^2$	1 mH à 1 H

3. Décharge d'un condensateur (régime libre)



Lorsqu'un condensateur, de capacité C, chargé avec une tension U_0 est connecté, à l'instant $t = 0$, à un conducteur ohmique de résistance R, il se décharge dans ce conducteur.

3.1. Etablir l'équation différentielle

On détermine l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur :

Loi des mailles : $u_R + u_c = 0$
Loi d'Ohm : $u_R = R.i$
Pour le condensateur : $i = C.\frac{du_c}{dt}$

$$\boxed{R.C.\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = 0}$$

3.2. Forme canonique de l'équation différentielle

L'équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boxed{\tau.\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} + u_c(t) = u_{\mathrm{perm}}}$$

avec :
- τ le temps caractéristique du circuit exprimée en seconde.
- u_{perm} la tension aux bornes du condensateur en régime permanent.

3.3. Résolution de l'équation différentielle

La solution à cette équation différentielle est de la forme : $u_c(t) = A.e^{-t/\tau} + u_{\mathrm{perm}}$

La constante A est déterminée grâce aux conditions initiales : $A = u_c(0) = U_0$

La tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur vaut donc :

$$u_c(t) = U_0.e^{-t/(RC)}$$

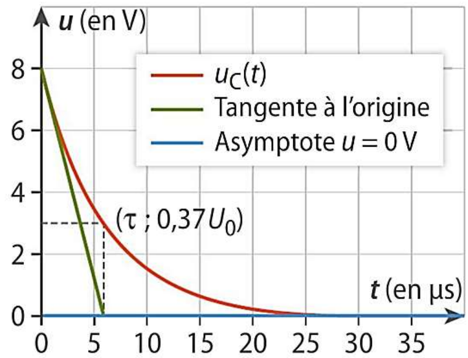
Le courant dans le circuit vaut :

$$i(t) = \frac{-u_c(t)}{R} = -\frac{U_0}{R}.e^{-t/(RC)}$$

Remarques : le courant dans le circuit est négatif. Le condensateur se comporte comme un générateur mais nous avons utilisé la convention récepteur !
la tension aux bornes du condensateur est continue en $t = 0$, le courant dans le circuit ne l'est pas.

3.4. Analyse graphique

- Au bout du temps caractéristique $\tau = RC$, le condensateur est déchargé à 63 % (il ne reste plus que 37% de la tension de départ).
- On estime que le condensateur est complètement déchargé au bout de 5τ.



3.5. Bilan d'énergie

En multipliant par le courant i la relation obtenue grâce à la loi des mailles, on obtient :

$$u_R(t).i(t) \quad + \quad u_c(t).i(t) \quad = 0$$
$$R.i^2(t) + u_c(t).C.\frac{du_c(t)}{dt} = 0$$
$$R.i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right) = 0$$
$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} \; + \quad \mathcal{P}_c \qquad = 0$$

⇨ Variation d'énergie stockée dans le condensateur = - Puissance dissipée (effet Joule)

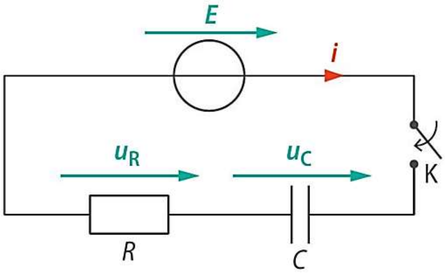
Calcul des énergies associées :

- $\mathcal{W}_{\text{Joule}} = \int_{t=0}^{\infty} R.i^2(t).dt = \frac{1}{2}.C.U_0^2$
- $\Delta\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \int_{t=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right).dt = \int_{u_c=U_0}^{u_c=0} d\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right) = -\frac{1}{2}.C.U_0^2$ = - $\mathcal{W}_{\text{Joule}}$

Durant la décharge, toute l'énergie qui était stockée dans C est dissipée dans la résistance.

4. Charge d'un condensateur (régime forcé)

Lorsqu'un condensateur initialement déchargé est relié, à l'instant $t = 0$, à un générateur délivrant une tension E constante via un circuit possédant une résistance R, il se charge jusqu'à atteindre la tension $u_c = E$.



4.1. Etablir l'équation différentielle

On peut déterminer l'***équation différentielle*** régissant l'évolution de la tension u_c aux bornes du condensateur :

$$\left.\begin{array}{ll}\textbf{Loi des mailles :} & u_R + u_c = E \\ \textbf{Loi d'Ohm :} & u_R = R.i \\ \textbf{Pour le condensateur :} & i = C.\frac{du_c}{dt}\end{array}\right\} \qquad \boxed{R.C.\frac{du_c}{dt} + u_c = E}$$

4.2. Résolution de l'équation différentielle

La solution à cette équation différentielle est de la forme : $u_c(t) = B.e^{-t/(RC)} + E$

La constante B est déterminée grâce aux conditions initiales : $B + E = u_c(0) = 0$ donc $B = -E$

La tension aux bornes du condensateur vaut donc :

$$\boxed{u_c(t) = E.(1 - e^{-t/(RC)})}$$

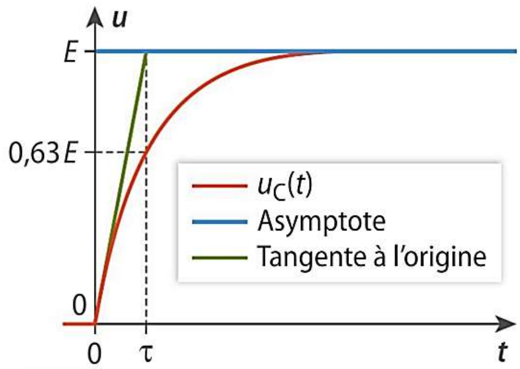
Le courant dans le circuit vaut :

$$i(t) = \frac{E - u_c(t)}{R} = \frac{E}{R}.e^{-t/(RC)}$$

Remarque : la tension aux bornes du condensateur est continue en $t = 0$, le courant dans le circuit ne l'est pas.

4.3. Analyse graphique

- Au bout du temps caractéristique $\tau = RC$, le condensateur est chargé à 63 %.
- On estime que le condensateur est complètement chargé au bout de 5τ.



4.4. Bilan d'énergie

En multipliant par le courant $\boldsymbol{i}$ la relation obtenue grâce à la loi des mailles, on obtient :

$$u_R.i \quad + \quad u_c.i \quad = E.i$$

$$R.i^2 + u_c.C.\frac{du_c}{dt} = E.i$$

$$R.i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right) = E.i$$

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} + \quad \mathcal{P}_c \quad = \mathcal{P}_{\text{fournie}}$$

⇨ Puissance dissipée (effet Joule) + Variation d'énergie emmagasinée = Puissance fournie

<u>Calcul des énergies associées</u> :

- $\mathcal{W}_{\text{fournie}} = \int_{t=0}^{\infty} E.i(t).dt = C.E^2$
- $\Delta\mathcal{E}_{\text{condensateur}} = \int_{t=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right).dt = \int_{u_c=0}^{u_c=E} d\left(\frac{1}{2}.C.u_c^2\right) = \frac{1}{2}.C.E^2$
- $\mathcal{W}_{\text{Joule}} = \int_{t=0}^{\infty} R.i^2(t).dt = \frac{1}{2}.C.E^2$

L'énergie fournie par le générateur durant la totalité de la charge est à moitié dissipée et à moitié emmagasinée dans le condensateur.

AU PROGRAMME

Notions et contenus	Capacités exigibles	Dans les exercices
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. ***Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.*** *<u>Capacité numérique</u>* : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.	
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.	