

MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°1 (correction) 20/09/25

EXERCICE 1

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < \sin(x)$.
(b) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) = 5$.
(c) $\forall n \in E, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$.
(d) $\exists m \in F, \forall x \in E, m > x$.
2. (a) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \sin(x)$
(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \neq 5$.
(c) $\exists n \in E, \forall k \in \mathbb{Z}, n \neq 2k$
(d) $\forall m \in F, \exists x \in E, m \leq x$.

EXERCICE 2

1. Soient x et y deux nombres rationnels. Alors il existe $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ (avec $q \neq 0$ et $q' \neq 0$) tels que $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$.

Mais alors $x + y = \frac{pq' + p'q}{qq'}$. Or $pq' + p'q$ est un nombre entier (par sommes et produits de nombres entiers) et qq' est un entier non nul (produit de deux entiers non nuls). On en déduit donc que $x + y$ est un nombre rationnel.

2. On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$.

- **Initialisation** : on l'a vue à la question précédente.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tel que toute somme de n nombres rationnels soit un nombre rationnel. On veut montrer que toute somme de $n + 1$ nombres rationnels est un nombre rationnel.
Soient $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ des nombres rationnels. $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}$. Or $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ est un nombre rationnel (d'après l'hypothèse de récurrence) et x_{n+1} est un nombre rationnel aussi. On s'est donc ramené à une somme de deux rationnels (et on sait qu'elle est rationnelle d'après la question 1. On a donc prouvé l'hérédité.
- **Conclusion** : la propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 2$ (d'après le principe de récurrence simple).

3. Supposons par l'absurde que la somme d'un rationnel r et un irrationnel x soit un nombre rationnel s . On aurait $r + x = s$ et donc $x = s - r$. Or, $s - r$ est la somme de deux nombres rationnels, donc est rationnel, et x est irrationnel. On a donc obtenu une inégalité entre un rationnel et un irrationnel, absurde. On conclut que la somme d'un rationnel et un irrationnel est toujours un nombre irrationnel.
4. Premier exemple : $x = \sqrt{2}$ et $y = -\sqrt{2}$. x et y sont tous les deux irrationnels, mais leur somme (0) est un rationnel.

Deuxième exemple : $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{2}$. x et y sont deux irrationnels et leur somme ($2\sqrt{2}$) est irrationnelle.

EXERCICE 3

On va raisonner par récurrence (à deux crans) sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et $0! \leq u_1 \leq 1!$ donc la propriété est vérifiée.

Pour $n = 2$, on a $u_2 = 2$ et $1! \leq u_2 \leq 2!$ donc la propriété est vérifiée.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(n-1)! \leq u_n \leq n! \quad \text{et} \quad n! \leq u_{n+1} \leq (n+1)!$$

(on veut montrer que $(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$.)

Or, en additionnant les inégalités données par l'hypothèse de récurrence, on a

$$(n-1)! + n! \leq u_n + u_{n+1} \leq n! + (n+1)!$$

puis, en multipliant par $(n+1)$ (qui est, bien sûr, strictement positif) :

$$(n+1)((n-1)! + n!) \leq (n+1)(u_n + u_{n+1}) \leq (n+1)! + (n+1)(n+1)!$$

soit

$$(n+1)! + (n+1)(n-1)! \leq u_{n+2} \leq (n+1)!(n+2)$$

D'une part, $(n+1)!(n+2) = (n+2)!$ et d'autre $(n+1)! + (n+1)(n-1)! \geq (n+1)!$ donc on peut en déduire

$$(n+1)! \leq u_{n+2} \leq (n+2)!$$

ce qui termine l'hérédité.

- **Conclusion :** La propriété étant initialisée et héréditaire, on conclut (par récurrence à deux crans) qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 4

$$1. S_n = \sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = 2 \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n^2 + n}$$

$$2. T_n = \sum_{k=1}^n 2^k = \sum_{k=0}^n 2^k - 1 = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - 1 = \boxed{2^{n+1} - 2}$$

$$3. P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k} = \boxed{n}$$

$$4. Q_n = \prod_{k=1}^n 3k = \boxed{3^n \cdot n!}$$

$$5. W_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} 1^k = (7+1)^n = \boxed{8^n}$$

EXERCICE 5

1. • **Initialisation :** pour $n = 1$, on obtient $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1 \times 4}{4 \times 2 \times 3}$ ou encore $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ qui est, bien évidemment, vraie.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

(On veut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$)

Or, d'une part,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=1}^{n+1}} \right\} \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} &= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Donc on peut conclure $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$ et l'hérédité est prouvée.

- **Conclusion :** la formule étant initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Après calcul, on trouve

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2) - 2(n+2) + 2(n+1)}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 3n + 2 - 2n - 4 + 2n + 2}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n^2 + 3n}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

EXERCICE 6

1. On a $\boxed{a_0 = 1}$, $\boxed{a_1} = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = \boxed{1}$, $\boxed{a_2} = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{4!}{2!2!} = \boxed{2}$, $\boxed{a_3} = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{6!}{3!3!} = \boxed{5}$ et $\boxed{a_4} = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{8!}{4!4!} = \boxed{14}$.

D'autre part, $\boxed{S_0} = a_0 a_0 = \boxed{1}$, $\boxed{S_1} = a_0 a_1 + a_1 a_0 = \boxed{2}$, $\boxed{S_2} = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = \boxed{5}$, $\boxed{S_3} = a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 = \boxed{14}$ et $\boxed{S_4} = a_0 a_4 + a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 + a_4 a_0 = \boxed{42}$

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.

2. On a $T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}$. En faisant le changement d'indice $k' = n - k$, on obtient

$$T_n = \sum_{k'=0}^n (n - k') a_{n-k'} a_k = \sum_{k=0}^n (n - k) a_k a_{n-k}$$

puis, en additionnant les deux formules pour T_n on obtient $2T_n = n \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = n S_n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
(n+2)a_{n+1} &= (n+2) \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2(2n+1)a_n &= 2(2n+1) \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
 &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\
 &= \frac{2(2n+1)(2n)!(n+1)}{(n+1)n!n!(n+1)} \\
 &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}
 \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité voulue.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} + T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k a_{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\
 &= a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\
 &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (k+2) a_{k+1} a_{n-k} \quad \left. \begin{array}{l} \text{changement d'indice } k' = k-1 \\ \downarrow \end{array} \right\} \\
 &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n 2(2k+1) a_k a_{n-k} \\
 &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \\
 &= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n \\
 &= a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n
 \end{aligned}$$

Puis, comme $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1}$, on en déduit :

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.$$

5. • **initialisation** : pour $n = 0$ on a bien $a_1 = S_0$.
 • **hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = a_{n+1}$, on veut montrer que $S_{n+1} = a_{n+2}$.
 On a $\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$, mais alors, par hypothèse de récurrence :

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} = (2n+3)a_{n+1} = \frac{n+3}{2} a_{n+2}$$

Donc $S_{n+1} = a_{n+2}$ ce qui termine l'hérédité.

- **Conclusion** : la propriété étant initialisée et héréditaire, on en déduit, grâce au principe de récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = a_{n+1}.$$