

MPSI - Devoir surveillé de Mathématiques n°1 - 21/09/2024

(2h00, calculatrices interdites)

Consignes : La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Pensez à encadrer ou souligner vos résultats. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Le devoir comporte 2 pages. Il est composé de 6 exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

EXERCICE 1

Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec quantificateurs) et en donner une brève justification :

1. L'équation $2x + 3 = 0$ possède une unique solution réelle.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un minimum.

(Rappel : le minimum d'un ensemble est un élément de cet ensemble qui est inférieur ou égal à tous les éléments de l'ensemble).

3. Tout nombre réel est l'opposé d'un nombre réel.

4. Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

EXERCICE 2

Soient A , B et C des ensembles.

Montrer **rigoureusement** que :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

EXERCICE 3

Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$1 - \frac{1}{3}n < \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{1 + \frac{1}{3}n}.$$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 10$ et soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Calculer et simplifier au maximum les sommes et produits suivants :

$$\bullet S_1 = \sum_{k=4}^n k^2;$$

$$\bullet S_3 = \sum_{k=10}^n (k+1);$$

$$\bullet P_2 = \prod_{k=3}^n 2;$$

$$\bullet S_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^k;$$

$$\bullet P_1 = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+2};$$

$$\bullet P_3 = \prod_{j=5}^n j.$$

EXERCICE 5

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$.

L'objectif de cet exercice est de montrer la formule suivante (en passant par plusieurs étapes) :

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = 2^{n-p} \binom{n}{p}.$$

1. Pour q entier naturel, calculer $\sum_{j=0}^q \binom{q}{j}$.

2. Pour n, p, k entiers avec $0 \leq p \leq k \leq n$, exprimer $\frac{\binom{n}{k} \binom{k}{p}}{\binom{n}{p}}$ sous la forme d'un coefficient binomial.

3. En déduire l'égalité voulue.

EXERCICE 6 (SOMMES DE NOMBRES IMPAIRS)

On pose

$$\begin{aligned} s(1) &= 1 \\ s(2) &= 3 + 5 \\ s(3) &= 7 + 9 + 11 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

de sorte que $s(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1. Calculer $s(i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et 4. Que peut-on conjecturer?

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I(k)$ le k -ème entier impair (au sens où $I(1) = 1$, $I(2) = 3$, $I(3) = 5$, etc.).

2. Sans justification, exprimer $I(k)$ en fonction de k .

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(N) = \sum_{k=1}^N I(k)$.

3. Montrer que $S(N) = N^2$.

4. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $T_n = \sum_{i=1}^n s(i)$.

Indication : T_n vaut $S(N)$ pour un certain N . Lequel?

5. En déduire la valeur de $s(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. On s'appliquera à simplifier le résultat au maximum, notamment pour retrouver la conjecture de la question 1.

6. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{i=1}^n i^3$ en fonction de n .