Notations

Les lettres $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{N}$ désignent respectivement les ensembles des réels, des complexes et des entiers naturels.

Partie I

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (matrices carrées de dimension n), formé des matrices inversibles. On l'appelle le groupe linéaire d'ordre n. La notation « $\cdot$ » désigne le produit matriciel.

Question 1

A) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

B) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

C) $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot\big)$ est un groupe commutatif

D) $\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\cdot\big)$ n'est pas un groupe commutatif

$E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire dont tous les termes sont nuls, sauf $e_{ij}=1$. I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.

Question 2

A) Pour toute matrice élémentaire $E_{i,j}$, $i\neq j$, la matrice $I+E_{i,j}$ est inversible et admet un inverse de la forme $I+\alpha E_{i,j}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

B) Pour toute matrice élémentaire $E_{i,j}$, $i\neq j$, la matrice $I+E_{i,j}$ n'est pas inversible.

C) Pour toute matrice élémentaire $E_{i,i}$, la matrice $I+E_{i,i}$ est inversible et admet un inverse de la forme $I+\alpha E_{i,i}$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

D) Pour toute matrice élémentaire $E_{i,i}$, la matrice $I+E_{i,i}$ n'est pas inversible.

On appelle centralisateur de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, noté $C\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)$, l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toute matrice inversible.

Question 3

On a :

A) $C\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)=\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

B) $C\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_{i,i},(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right\}$

C) $C\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha E_{i,i},\alpha\in\mathbb{R}\right\}$

D) $C\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i E_{i,j},(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n\right\}$

Soit la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

Question 4

A) La matrice P est inversible, et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B) La matrice P est inversible, et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

C) La matrice P est inversible, et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

D) La matrice P n'est pas inversible.

Une matrice A est dite nilpotente si $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$. On note $\mathrm{N}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ formé des matrices nilpotentes.

Question 5

A) La somme de 2 matrices nilpotentes est une matrice nilpotente

B) Le produit de 2 matrices nilpotentes est une matrice nilpotente

C) La somme de 2 matrices nilpotentes n'est jamais inversible

D) Si $A \in \mathrm{N}_n(\mathbb{R})$ matrice nilpotente d'ordre k, alors on a $k \leq n$.

Partie II

Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$u_n(f) = \left(\int_0^1 \left| f(t) \right|^n \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{n}}$$

Question 6

Soit λ un nombre réel, on a :

A) $u_n(\lambda f) = \lambda^n u_n(f)$

B) $u_n(\lambda f) = \lambda^{\frac{1}{n}} u_n(f)$

C) $u_n(\lambda f) = \lambda u_n(f)$

D) $u_n(\lambda f) = |\lambda| u_n(f)$

On suppose que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, et que le maximum de la fonction f est égal à 1. Soit $\varepsilon > 0$.

Question 7

A) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n(f) \geq 1$

B) Il existe des nombres u et v vérifiant $0 \leq u < v \leq 1$ tels que $f(x) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $x \in [u, v]$.

C) Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n(f)$ vérifie $u_n(f) \leq (v-u)^{\frac{1}{n}}(1-\varepsilon)$

D) La suite $u_n(f)$ admet pour limite 1

Soit $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et M le maximum de la fonction $x \mapsto \left| g(x) \right|$ sur $[0,1]$

Question 8

On a :

A) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(g) = M$

B) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(g) = \dfrac{1}{M}$

C) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(g) = |M|$

D) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(g) = \dfrac{1}{|M|}$

Partie III

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$$

Question 9

A) La suite I_n est croissante

B) La suite I_n est décroissante

C) La suite I_n n'est ni croissante, ni décroissante

D) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite I_n soit décroissante pour $n \geq n_0$

Question 10

On a :

A) $I_0 = 1$

B) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$

C) $I_1 = 1$

D) $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$

Question 11

À l'aide d'une intégration par parties, on montre que la suite I_n satisfait la propriété :

A) $(n+1)I_{n+1} = nI_n$

B) $nI_{n+2} = (n+2)I_n$

C) $(n+2)I_{n+2} = nI_n$

D) $(n+1)I_{n+2} = (n+2)I_n$

Question 12

On en déduit que la suite I_n vérifie :

A) $\lim\limits_{n\to\infty} (nI_nI_{n-1}) = \dfrac{\pi}{2}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} (nI_nI_{n-1}) = 1$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} (I_{n-1}/I_n) = 1$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} (I_{n-1}/I_n) = \dfrac{\pi}{2}$

Question 13

On déduit des résultats précédents

A) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(I_n)^2 = \dfrac{2}{\pi}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(I_n)^2 = \dfrac{\pi}{2}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Question 14

On peut montrer que :

A) $I_{2n} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$ pour tout $n \geq 1$

B) $I_{2n} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}$ pour tout $n \geq 1$

C) $I_{2n} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 1$

D) $I_{2n} = \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 1$

Question 15

On déduit des résultats précédents que :

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{2}{\pi}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout nombre $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$$

Question 16

On a :

A) $F_1(x) = 1 + \tan^2 x$

B) $F_1(x) = x$

C) $F_2(x) = \tan x - x$

D) $F_2(x) = 2\left(\tan x + \tan^3 x\right)$

Question 17 Pour $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, on a l'égalité

A) $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1}$

B) $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n}(\tan x)^{n}$

C) $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1}$

D) $F_{n+2}(x) + F_n(x) = \dfrac{1}{n+2}(\tan x)^{n+2}$

Question 18

On en déduit :

A) $F_4(x) = \dfrac{\tan^2 x}{2} - \tan x + x$

B) $F_4(x) = \dfrac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x$

C) $F_4(x) = \dfrac{\tan^4 x}{4} - \tan x + x$

D) $F_4(x) = -\dfrac{\tan x}{2} + x$

Pour tout entier n, on pose

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \, \mathrm{d}t$$

Question 19

A) La suite J_n est croissante et convergente

B) La suite J_n est décroissante et convergente

C) La suite J_n est croissante et divergente

D) La suite J_n est décroissante et divergente

Soit a un réel vérifiant $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$.

Question 20

On peut montrer que :

A) $J_n \geq a(\tan a)^n + \dfrac{\pi}{4} - a$

B) $J_n \leq a(\tan a)^n + \dfrac{\pi}{4} - a$

C) $J_n \geq \dfrac{\pi}{4} + a$

D) $J_n \leq \dfrac{\pi}{4} + a$

Question 21

On en déduit :

A) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \dfrac{\pi}{4}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = +\infty$

Question 22

Pour tout entier $n \geq 1$, on a l'égalité :

A) $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

B) $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

C) $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

D) $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n J_{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Question 23 On peut ainsi en déduire que :

A) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n-1} = \dfrac{\pi}{4}$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \dfrac{\pi}{4}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$

Partie IV

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\{\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}\}$ les racines n-ièmes de l'unité :

$$\omega_k = \omega^k \text{ avec } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. La notation $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Question 24

On établit que :

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \frac{1+\omega^{np}}{1-\omega^p}$ si $\omega^p \neq 1$

B) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p}$ si $\omega^p \neq 1$

C) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = n$ si $\omega^p = 1$

D) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = 1$ si $\omega^p = 1$

Question 25

Un calcul permet d'obtenir :

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k = 2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1$

B) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k = -2^n \cos^n \frac{\pi}{n} + 1$

C) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k = 2^n \cos^n \frac{\pi}{n} + 1$

D) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k = -2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1$

Question 26

Le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$ vaut :

A) $(-1)^n$

B) $(-1)^{n-1}$

C) $(-1)^{n-1} \cdot \omega$

D) $(-1)^n \cdot \omega$

Dans toute la suite, $E(x)$ désigne la fonction « partie entière de x », et j est la racine cubique de l'unité dont la partie imaginaire est strictement positive.

Question 27 On a :

A) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2\binom{n}{k}$

B) $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

C) $(1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$

D) $(1+j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k}$

Question 28

De même,

A) $(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overline{j}^{2k}$

B) $(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$

En posant $Z_n = 2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n$, on obtient ainsi

C) $Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2 + j^k + j^{2k}\right)$

D) $Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1 + j^k + \overline{j}^{2k}\right)$

La notation $k \equiv j\,(n)$ signifie que le reste de la division euclidienne de k par n est j. On souhaite distinguer les cas selon lesquels $k \equiv 0\,(3)$, $k \equiv 1\,(3)$ ou $k \equiv 2\,(3)$.

Question 29

On a la décomposition suivante :

A) $Z_n = \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k}+j^{6k}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+1}+j^{6k+2}\right) + \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k+2}\left(1+j^{3k+2}+j^{6k+4}\right)$

B) $Z_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k}+j^{6k}\right) + \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+1}+j^{6k+2}\right) + \sum_{k=0}^{E((n+1)/3)} \binom{n}{3k+2}\left(1+j^{3k+2}+j^{6k+4}\right)$

C) $Z_n = \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k-1}\left(1+j^{3k}+j^{6k}\right) + \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k+1}+j^{6k+2}\right) + \sum_{k=0}^{E((n+1)/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+2}+j^{6k+4}\right)$

D) $Z_n = \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}\left(1+j^{3k}+j^{6k}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k+1}\left(1+j^{3k+1}+j^{6k+2}\right) + \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k+2}\left(1+j^{3k+2}+j^{6k+4}\right)$

Question 30

On obtient alors :

A) $Z_n = 3 \sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k}$

B) $Z_n = 3 \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k}$

C) $Z_n = 3 \sum_{k=0}^{E((n-2)/3)} \binom{n}{3k}$

D) $Z_n = 3 \sum_{k=0}^{E((n-1)/3)} \binom{n}{3k-1}$

Question 31 On remarque que :

A) $(1+j)^n + (1+j^2)^n = -2\mathrm{Re}(1+j)^n$

B) $(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\mathrm{Im}(1+j)^n$

C) $(1+j)^n = 2^n \cos^n \frac{\pi}{3} e^{\frac{in\pi}{3}}$

D) $(1+j^2)^n = e^{\frac{-in\pi}{3}}$

Question 32

Il en résulte que :

A) $(1+j)^n + (1+j^2)^n = -2\cos\frac{n\pi}{3}$

B) $(1+j)^n + (1+j^2)^n = 2\sin\frac{n\pi}{3}$

Finalement, on obtient :

C) $\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$

D) $\sum_{k=0}^{E(n/3)} \binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$

Partie V

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. On considère le système d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases} \qquad (S)$$

où j désigne la racine cubique de l'unité dont la partie imaginaire est strictement positive.

Question 33

A) Quels que soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, le système (S) n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}^3$.

B) Quels que soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, le système (S) admet une solution unique dans $\mathbb{C}^3$.

C) Quels que soient $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, le système (S) admet une infinité de solutions dans $\mathbb{C}^3$.

D) Il existe un sous-ensemble $E \subset \mathbb{C}^3$, $E \neq \mathbb{C}^3$ tel que le système (S) admet une solution si $(a,b,c) \in E$ et aucune solution si $(a,b,c) \notin E$

Question 34

Une solution de (S) est alors :

A) $(x,y,z) = \left(\frac{a+bj^2+cj}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}\right)$

B) $(x,y,z) = \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}, \frac{a+bj^2+cj}{3}\right)$

C) $(x,y,z) = \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+bj^2+cj}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}\right)$

D) $(x,y,z) = \left(\frac{a+bj^2+cj}{3}, \frac{a+bj+cj^2}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$

Question 35

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de (S) soit réelle (i.e.$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) est :

A) $a \in \mathbb{R}$ et $b = c$

B) $a \in \mathbb{R}$ et $b = \overline{c}$

C) $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

D) $a \in \mathbb{R}$ et $(b,c) \in i\mathbb{R}^2$

Question 36

Une solution réelle de (S) est alors :

A) $(x,y,z) = \left(\dfrac{a+2\mathrm{Re}(b)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj^2)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj)}{3}\right)$

B) $(x,y,z) = \left(\dfrac{a+2\mathrm{Im}(b)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Im}(bj)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Im}(bj^2)}{3}\right)$

C) $(x,y,z) = \left(\dfrac{a+2b}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj^2)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj)}{3}\right)$

D) $(x,y,z) = \left(\dfrac{a+2\mathrm{Re}(b)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj)}{3}, \dfrac{a+2\mathrm{Re}(bj^2)}{3}\right)$