CH. 1

FORCES ET DEUXIÈME LOI DE NEWTON

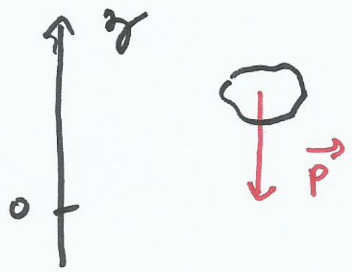
I. FORCES

1. GÉNÉRALITÉS

- LES FORCES SONT REPRÉSENTÉES PAR DES VECTEURS.
- LA NORME $\|\vec{F}\|$ EST ÉGALE À L'INTENSITÉ DE LA FORCE QUI S'EXPRIME EN NEWTONS.

⚠ LA NORME EST POSITIVE OU NULLE.

Ex :

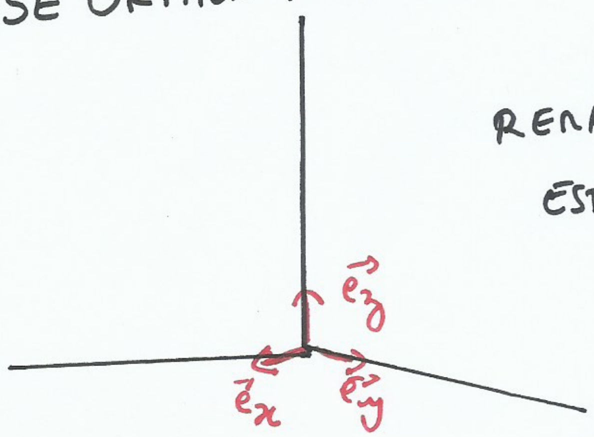


$\|\vec{P}\| = mg > 0$

- IL EST ESSENTIEL DE BIEN SAVOIR PROJETER UNE FORCE DANS UNE BASE.

2. PROJECTION D'UN VECTEUR FORCE DANS UNE BASE

- EN FIN DE TS, LA SEULE BASE CONNUE EST LA BASE ORTHONORMÉE CARTÉSIENNE $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$



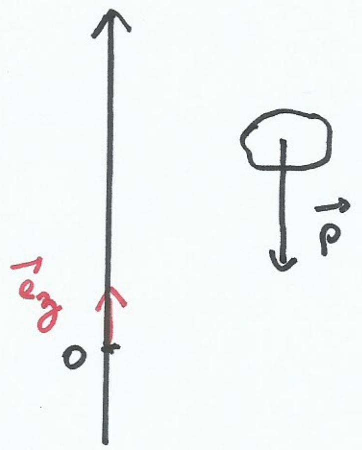
REMARQUE : CETTE BASE EST AUSSI NOTÉE $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

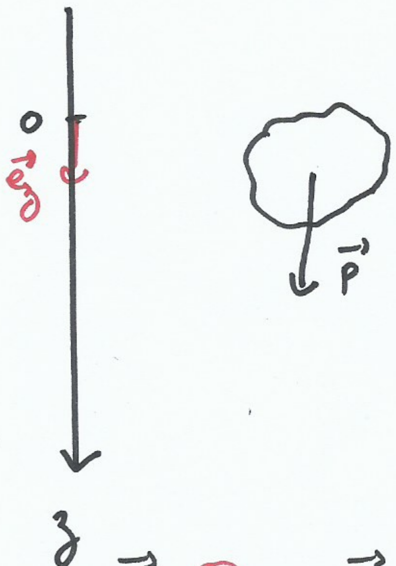
• LES VECTEURS $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ET $\vec{e}_z$ DE CETTE BASE SONT DE NORME ÉGALE À 1 ET ILS SONT ORTHOGONAUX 2 À 2.

$$\begin{cases} \|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1 \\ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \end{cases}$$

• PROJECTION À 1D : EXEMPLES

EX. 1 :



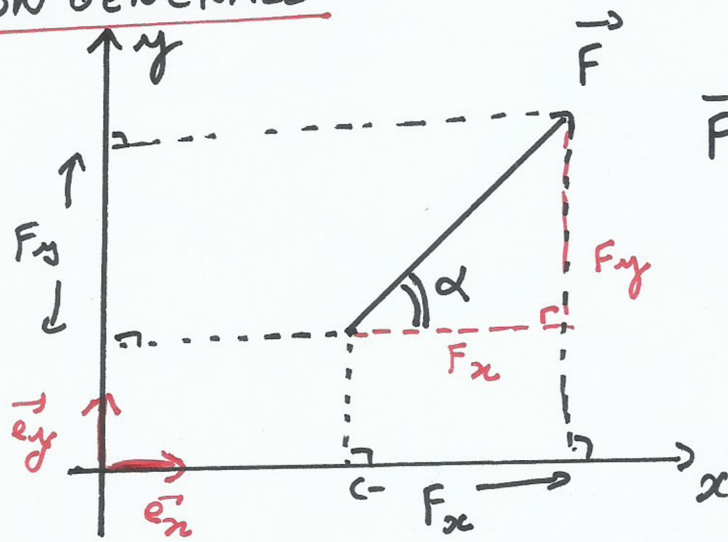


$\vec{P} = - mg\,\vec{e}_z$ | $\vec{P} = + mg\,\vec{e}_z$

⚠ MAIS $\|\vec{P}\| = mg > 0$ DANS LES 2 CAS

• PROJECTION À 2D

* EXPRESSION GÉNÉRALE



$$\vec{F} = F_x\,\vec{e}_x + F_y\,\vec{e}_y$$

- α : ANGLE $(\widehat{\vec{e_x}, \vec{F}})$ QUE FAIT $\vec{F}$ AVEC L'AXE DES x.

- DANS LE TRIANGLE RECTANGLE DONT L'HYPOTHÉNUSE EST LA NORME $\|\vec{F}\|$, ON PEUT ÉCRIRE :

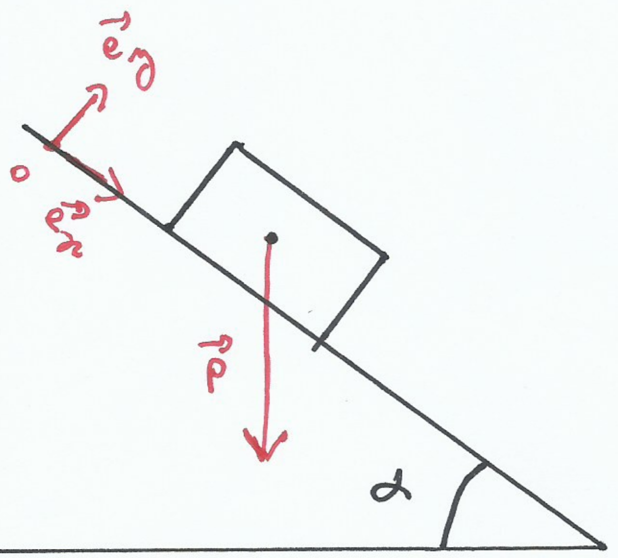
$$\begin{cases} \dfrac{F_x}{\|\vec{F}\|} = \cos\alpha \Longrightarrow F_x = \|\vec{F}\| \cos\alpha \\ \\ \dfrac{F_y}{\|\vec{F}\|} = \sin\alpha \Longrightarrow F_y = \|\vec{F}\| \sin\alpha \end{cases}$$

- D'OÙ : $\boxed{\vec{F} = \|\vec{F}\| \cos\alpha \, \vec{e_x} + \|\vec{F}\| \sin\alpha \, \vec{e_y}}$

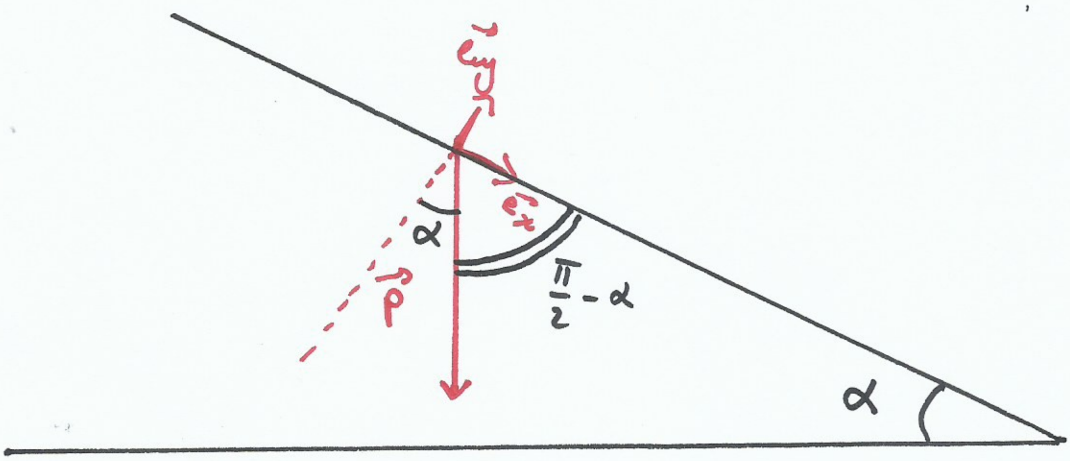
<u>REMARQUE 1</u>: LES COMPOSANTES $\|\vec{F}\| \cos\alpha$ et $\|\vec{F}\| \sin\alpha$ DU VECTEUR $\vec{F}$ PEUVENT ÊTRE POSITIVES OU NÉGATIVES CAR α N'EST PAS RESTREINT À L'INTERVALLE $[0; \frac{\pi}{2}]$.

<u>REMARQUE 2</u>: ON PROJETTE DE LA MÊME FAÇON UN VECTEUR VITESSE, UN VECTEUR ACCÉLÉRATION.

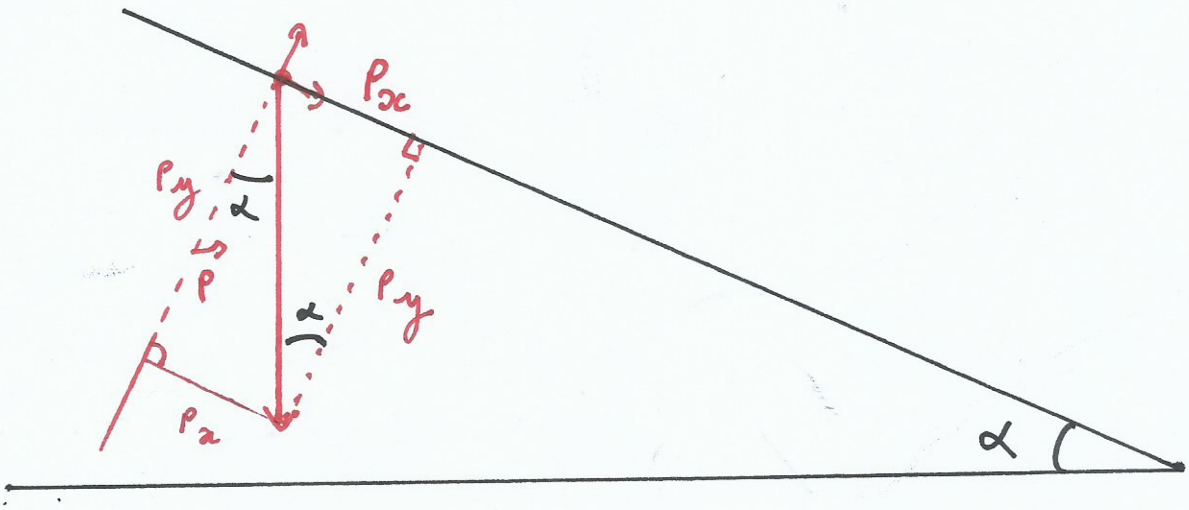
* <u>EXEMPLE</u> :



- BIEN IDENTIFIER LES ANGLES :



- FAIRE APPARAÎTRE UN TRIANGLE OÙ APPLIQUER LES FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE :



$$* \quad \frac{|P_x|}{\|\vec{P}\|} = \sin\alpha \Longrightarrow |P_x| = \|\vec{P}\| \sin\alpha$$

OR, $P_x > 0 \Longrightarrow P_x = \|\vec{P}\| \sin\alpha$

$$\underline{P_x = mg \sin\alpha}$$

* $\dfrac{|P_y|}{\|\vec{P}\|} = \cos\alpha \Rightarrow |P_y| = \|\vec{P}\|\cos\alpha$

OR, $P_y < 0 \Rightarrow P_y = -\|\vec{P}\|\cos\alpha$

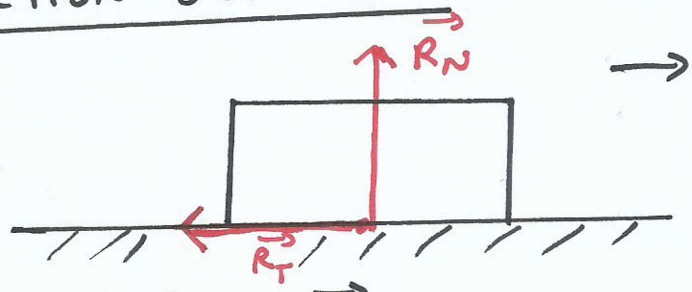
$$P_y = -mg\cos\alpha$$

D'où : $\boxed{\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}}$

3. QUELQUES FORCES À BIEN CONNAÎTRE

* LA RÉACTION D'UN PLAN SUR UN OBJET POSÉ DESSUS.

→ SENS DU MVT.



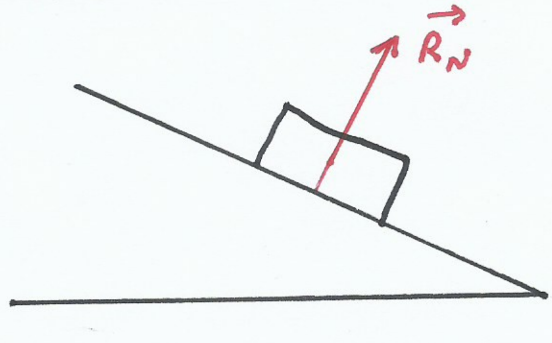
$$\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}$$

$\vec{R_N}$: RÉACTION NORMALE. PERPENDICULAIRE AU PLAN

$\vec{R_T}$: RÉACTION TANGENTIELLE. DANS LE PLAN

⚠ EN L'ABSENCE DE FROTTEMENT : $\vec{R_T} = \vec{0}$
LA RÉACTION EST ALORS PUREMENT NORMALE.

⚠ BIEN ORIENTER $\vec{R_N}$
POUR UN PLAN INCLINÉ.



- LA NORME DE $\vec{R}_T$ EST PROPORTIONNELLE À CELLE DE $\vec{R}_N$:

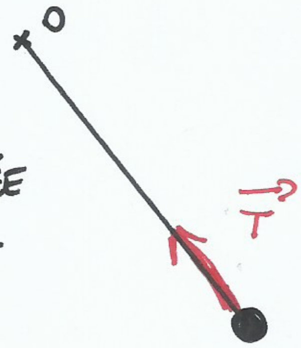
$$\|\vec{R}_T\| = f\,\|\vec{R}_N\|$$

MAIS PAS DE FORMULE DONNANT $\vec{R}_N$

- OÙ f EST LE COEFFICIENT DE FROTTEMENT SOLIDE QUI DÉPEND DE LA NATURE DES DEUX MATÉRIAUX (PLAN ET OBJET) EN CONTACT.

* LA TENSION D'UN FIL

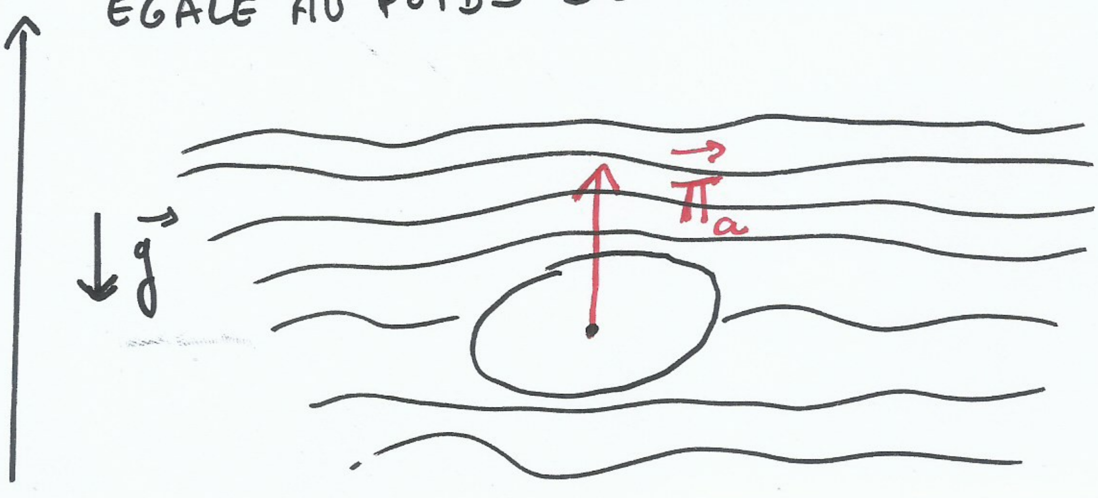
$\vec{T}$ SELON LE FIL, ORIENTÉE VERS LE POINT OÙ IL EST ATTACHÉ.



⚠ PAS DE FORMULE DONNANT $\|\vec{T}\|$

* LA POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

TOUT CORPS PLONGÉ DANS UN FLUIDE (LIQUIDE OU GAZ) SUBIT DE LA PART DE CE FLUIDE UNE POUSSÉE VERTICALE, ASCENDANTE, DONT LA NORME EST ÉGALE AU POIDS DE FLUIDE DÉPLACÉ.



$$\|\vec{\Pi}_a\| = m_{\substack{\text{FLUIDE}\\ \text{DEP}}} \times g$$

$$\|\vec{\Pi}_a\| = \mu_{\text{FLUIDE}} \times V_{\substack{\text{FLUIDE}\\ \text{DÉPLACÉ}}} \times g$$

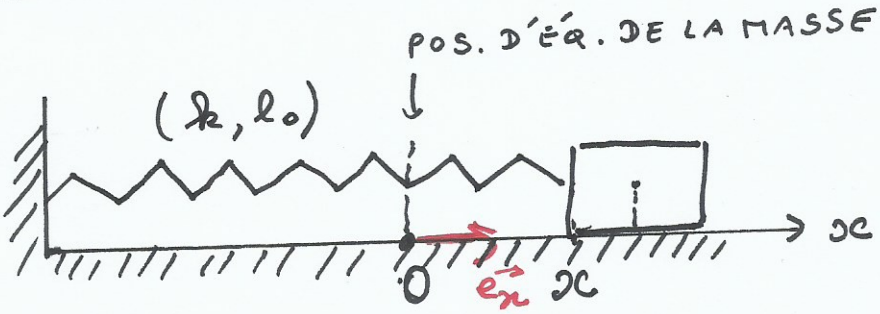
$$\boxed{\|\vec{\Pi}_a\| = \mu_F \times V_{\substack{\text{objet}\\ \text{imm.}}} \times g}$$

μ_F : MASSE VOLUMIQUE DU FLUIDE ($kg.m^{-3}$)

$V_{\substack{\text{objet}\\ \text{imm}}}$: VOLUME IMMERGÉ DE L'OBJET (m^3)

g : INTENSITÉ

* <u>LA FORCE DE RAPPEL D'UN RESSORT EXERCÉE SUR UNE MASSE</u>



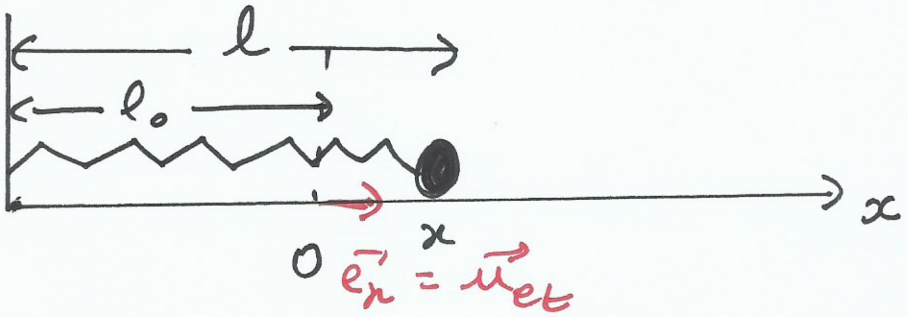
$$\boxed{\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u_{et}}}$$

. UN RESSORT SE CARACTÉRISE PAR 2 GRANDEURS :

→ SA CONSTANTE DE RAIDEUR k (EN $N.m^{-1}$) > 0

→ SA LONGUEUR AU REPOS l_0 (EN m)

. $\vec{u_{et}}$ EST LE VECTEUR UNITAIRE (SA NORME = 1) DONT LA DIRECTION ET LE SENS SONT CEUX DE L'ÉTIREMENT. <u>ICI</u> : $\vec{u_{et}} = +\vec{e_x}$.



. . l EST LA LONGUEUR DU RESSORT À UN INSTANT t.

REMARQUES:

(1) $\vec{F}$ EST OPPOSÉE À LA DÉFORMATION DU RESSORT

→ SI RESSORT ÉTIRÉ: $l > l_0$

$$\vec{F} = -k\underbrace{(l-l_0)}_{>0}\vec{u}_{et}$$

⇒ $\vec{F}$ EN SENS OPPOSÉ À $\vec{u}_{et}$

→ SI RESSORT COMPRIMÉ: $l < l_0$

$$\vec{F} = -k\underbrace{(l-l_0)}_{<0}\vec{u}_{et}$$

⇒ $\vec{F}$ DE MÊME SENS QUE $\vec{u}_{et}$

(2) AVEC LE CHOIX D'ORIGINE QUI A ÉTÉ FAIT ICI:

$$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_{et} \quad \text{AVEC} \quad l - l_0 = x$$

D'où: $\vec{F} = -kx\vec{e_x}$

II. EXEMPLES D'APPLICATION DE LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON

1. LES 3 LOIS DE NEWTON

- **PREMIÈRE LOI DE NEWTON** : PRINCIPE DE L'INERTIE

DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN, LE CENTRE D'INERTIE G D'UN CORPS EST EN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (M.R.U.) SSI LA SOMME DES FORCES EXTÉRIEURES QUI S'EXERCENT SUR LUI EST NULLE.

$$\boxed{\vec{v}_G \text{ CONSTANTE} \Longleftrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}}$$

REMARQUE : $\vec{v}_G = \vec{0}$ EST UN CAS PARTICULIER DE M.R.U.

- **DEUXIÈME LOI DE NEWTON** :

DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN, L'ACCÉLÉRATION DU CENTRE D'INERTIE G D'UN CORPS EST COLINÉAIRE À LA SOMME DES FORCES EXTÉRIEURES QUI S'EXERCENT SUR LUI.

$$\boxed{m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{ext}}$$

REMARQUE : LA LOI DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT CONDUIT À LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON POUR UN CORPS NON-RELATIVISTE ($v << c$).

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext} \quad \text{où} \quad \vec{p} = m\vec{v}_G$$

m constante si corps non-relativiste

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_G) = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$\Longrightarrow \quad m\vec{a}_G = \Sigma \vec{F}_{ext} \qquad \underline{2^{\text{e}}\ \text{LN}}$$

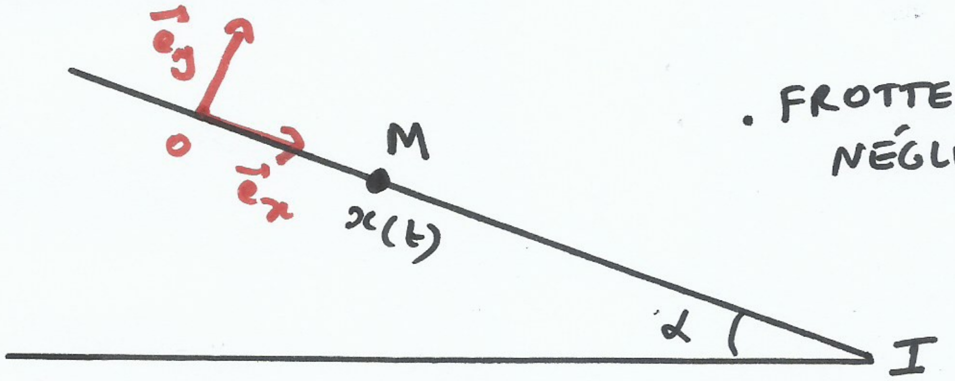
• TROISIÈME LOI DE NEWTON : PRINCIPE DES ACTIONS RÉCIPROQUES OU LOI DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION

SI UN CORPS A EXERCE SUR UN CORPS B LA FORCE $\vec{F}_{A/B}$ ALORS LE CORPS B EXERCE SUR LE CORPS A LA FORCE $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$

Ex :

2. EXEMPLE D'APPLICATION 1 : OBJET EN MOUVEMENT SUR UN PLAN INCLINÉ EN L'ABSENCE DE FROTTEMENTS

- SOIT UN OBJET M (SUPPOSÉ PONCTUEL) DE MASSE m POSÉ SUR UN PLAN INCLINÉ D'UN ANGLE α. A L'INSTANT $t=0$, IL EST LÂCHÉ SANS VITESSE INITIALE DU POINT D'ABSCISSE $x=0$.
- BASE $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$ TELLE QUE $\vec{e_x}$ SUIVANT LE PLAN INCLINÉ ET $\vec{e_y}$ ORTHOGONAL AU PLAN INCLINÉ, COMME REPRÉSENTÉ CI-DESSOUS.



- FROTTEMENTS NÉGLIGÉS

- UNE DISTANCE d SÉPARE L'ORIGINE O DU BAS DU PLAN INCLINÉ I.

- <u>BUTS</u> :

  a) DÉTERMINER L'ÉQUATION HORAIRE $x(t)$ DU MOUVEMENT DE L'OBJET.

  b) DÉTERMINER LA VITESSE DE L'OBJET LORSQU'IL ATTEINT LE POINT I.

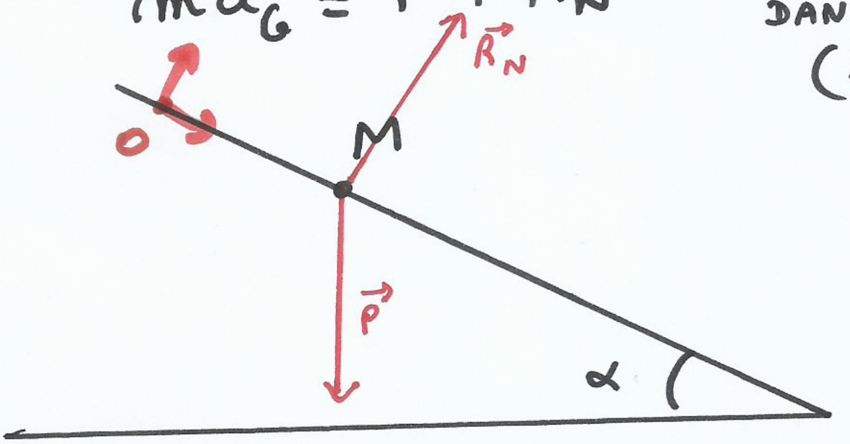
• RÉSOLUTION

a). ON APPLIQUE À L'OBJET LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE SUPPOSÉ GALILÉEN :

$$m\vec{a}_G = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R_N}$$

À PROJETER DANS LA BASE $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$



- PROJECTION DE $\vec{P}$ SUR $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$: VUE PAGES 4 et 5

$$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$$

- PROJECTION DE $\vec{R_N}$ SUR $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:

$$\vec{R_N} = R_N\,\vec{e_y}$$

- PROJECTION DE $\vec{a_G}$ SUR $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:

$$\vec{a_G} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y}$$

- DONC LA DEUXIÈME LOI DE NEWTON S'ÉCRIT :

$$m\left(\ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y\right) = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_y + R_N\vec{e}_y$$

OU ENCORE :

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha + R_N \end{pmatrix}$$

ICI, IL N'Y A PAS DE MOUVEMENT SELON L'AXE (OY). L'ORDONNÉE y RESTE CONSTANTE DONC $\dot{y}=0$ ET $\ddot{y}=0$. AINSI :

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha + R_N \end{pmatrix}$$

D'OÙ LE SYSTÈME :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = g \sin\alpha \quad (1) \\ \\ R_N = mg\cos\alpha \quad (2) \end{cases}$$

. ICI, POUR ÉTABLIR L'ÉQUATION HORAIRE DU MOUVEMENT, L'ÉQUATION (1) SUFFIT :

$$\ddot{x} = g \sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x} = g \sin\alpha \, t + C_1$$

→ ON DÉTERMINE LA CONSTANTE D'INTÉGRATION C_1 AVEC LA CONDITION INITIALE SUR LA VITESSE.

"OBJET LÂCHÉ SANS VITESSE INITIALE" : $\dot{x}(0) = 0$

$$\Longrightarrow \quad C_1 = 0$$

$$\dot{x} = g \sin\alpha \, t$$ VITESSE DE L'OBJET

$$\Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t^2 + C_2$$

→ ON DÉTERMINE LA CONSTANTE D'INTÉGRATION C_2 AVEC LA CONDITION INITIALE SUR LA POSITION.

$$x(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$$

D'OÙ L'ÉQUATION HORAIRE :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t^2}$$

b) VITESSE DE L'OBJET AU POINT I.

- LA VITESSE DE L'OBJET S'ÉCRIT :

$$v(t) = \dot{x}(t) = g \sin\alpha \, t$$

- SI L'ON DÉTERMINE L'EXPRESSION DE LA DATE t_I À LAQUELLE L'OBJET ATTEINT LE POINT I, ON POURRA CALCULER LA VITESSE $\dot{x}(t_I)$ EN CE POINT.

$\longrightarrow$ EXPRESSION DE t_I :

t_I TELLE QUE $x(t_I) = d$

$$\frac{1}{2} g \sin\alpha \, t_I^2 = d$$

$$t_I = \sqrt{\frac{2d}{g \sin\alpha}}$$

$\longrightarrow$ VITESSE AU POINT I :

$$\dot{x}(t_I) = g \sin\alpha \, t_I$$

$$\dot{x}(t_I) = g \sin\alpha \times \sqrt{\frac{2d}{g \sin\alpha}}$$

$$\boxed{\dot{x}(t_I) = \sqrt{2gd \sin\alpha}}$$

REMARQUE : ON TROUVE CE RÉSULTAT PLUS RAPIDEMENT AVEC UNE APPROCHE ÉNERGÉTIQUE.

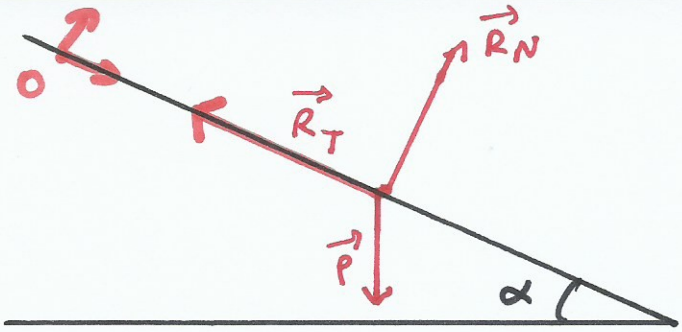
3. EXEMPLE D'APPLICATION 2 : OBJET EN MOUVEMENT SUR UN PLAN INCLINÉ AVEC FROTTEMENT SOLIDE

- ON REPREND L'EXERCICE PRÉCÉDENT MAIS CETTE FOIS ON TIENT COMPTE DES FROTTEMENTS OBJET /PLAN EN AJOUTANT AU MODÈLE LA RÉACTION TANGENTIELLE $\vec{R_T}$.

- **BUTS** :
  - a) ÉQUATION HORAIRE $x(t)$ DU MOUVEMENT
  - b) VITESSE DE L'OBJET AU POINT I

- **RÉSOLUTION** :

a) ON APPLIQUE LA 2ᵉ L.N. À L'OBJET DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE SUPPOSÉ GALILÉEN.



$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

- ON PROJETTE CETTE RELATION VECTORIELLE DANS LA BASE $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

$$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_y$$

$$\vec{R}_N = R_N\,\vec{e}_y$$

$$\vec{R}_T = -R_T\,\vec{e}_x \quad \text{où} \quad R_T = f R_N$$

$$\vec{a}_G = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y$$

AINSI : $$m(\ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y) = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_y + R_N\,\vec{e}_y - fR_N\,\vec{e}_x$$

OU ENCORE :

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ \\ m\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\ddot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha - fR_N \\ \\ -mg\cos\alpha + R_N \end{pmatrix}$$

D'OÙ LE SYSTÈME :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - f R_N & (1) \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_N = mg\cos\alpha & (2) \\ m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha & (1) \end{cases}$$

. À PRÉSENT, ON DÉDUIT L'ÉQ. DU MOUVEMENT DE (1) :

$$\ddot{x} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

$$\ddot{x} = g\sin\alpha\left(1 - f\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$\ddot{x} = g\sin\alpha\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) < g\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{x} = g\sin\alpha\left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right)t + C_1$$

OR : $\dot{x}(0) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$