$$\dot{x} = g \sin\alpha \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) t$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) t^2 + C_2$$

OR : $x(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

D'OÙ L'ÉQUATION HORAIRE :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \left(1 - \frac{f}{\tan\alpha}\right) t^2}$$

· REMARQUE : EN L'ABSENCE DE FROTTEMENTS, $f = 0$

CONDUIT À $x(t) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \, t^2$ ÉTABLIE AU 2).

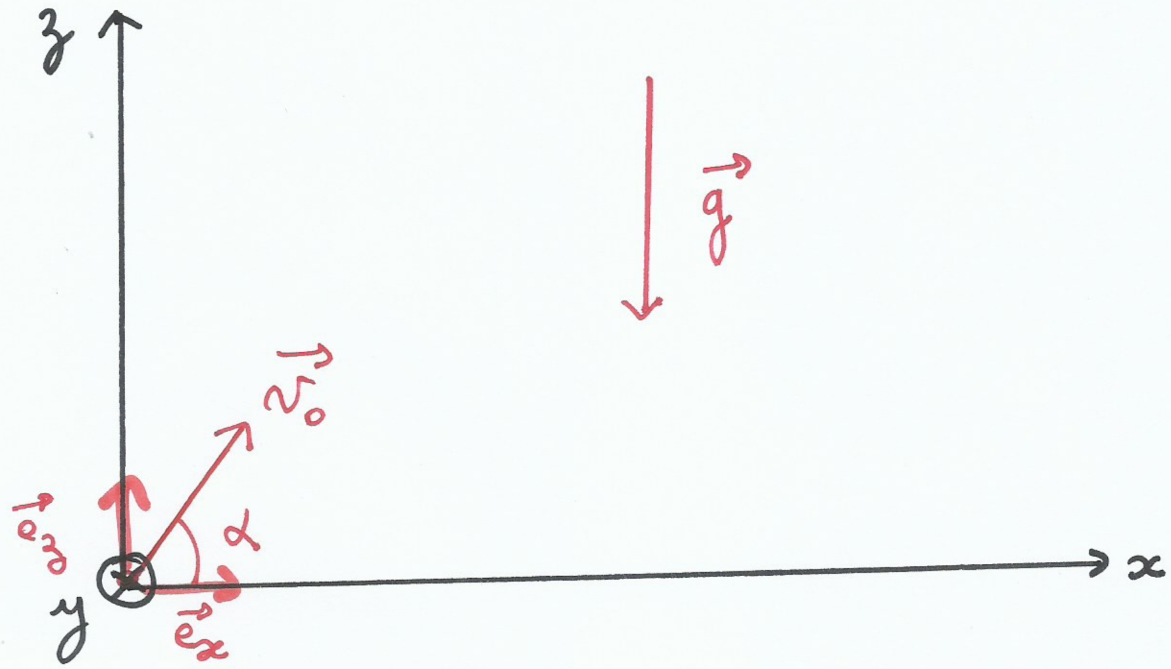
CETTE FOIS, L'OBJET AVANCE MOINS VITE À CAUSE DES FROTTEMENTS.

4. EXEMPLE D'APPLICATION 3 : PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

· HYPOTHÈSES : * ON ÉTUDIE LE MOUVEMENT D'UN OBJET SUPPOSÉ PONCTUEL, DE MASSE m, LANCÉ AVEC UNE VITESSE $\vec{v}_0$ FAISANT UN ANGLE α AVEC L'HORIZONTALE, DEPUIS L'ORIGINE O DU REPÈRE.

* LE CHAMP DE PESANTEUR $\vec{g}$ EST SUPPOSÉ UNIFORME

* LES FROTTEMENTS OBJET/AIR SONT NÉGLIGÉS.



BUTS :

(1) ÉTABLIR LES ÉQUATIONS HORAIRES DU MOUVEMENT.

(2) EN DÉDUIRE L'ÉQUATION CARTÉSIENNE DU MOUVEMENT.

(3) DÉTERMINER LA FLÈCHE = L'ALTITUDE LA PLUS GRANDE ATTEINTE PAR L'OBJET.

(4) DÉTERMINER LA PORTÉE, DISTANCE HORIZONTALE PARCOURUE PAR L'OBJET DU POINT OÙ IL EST LANCÉ JUSQU'AU POINT OÙ IL RETOMBE.

RÉSOLUTION :

(1) ON APPLIQUE LA 2ᵉ LOI DE NEWTON À L'OBJET DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE SUPPOSÉ GALILÉEN.

$$m\vec{a} = \vec{P} \quad \text{où} \quad P = -mg\vec{e_z}$$

⚠ LA FORCE AVEC LAQUELLE L'OBJET EST LANCÉ N'ENTRE PAS DANS LE BILAN DES FORCES CAR CETTE FORCE EST PRÉSENTE JUSTE AVANT $t=0$. ELLE SE "CACHE" DANS LA VITESSE INITIALE $\vec{v_0}$ QUI SERA UTILISÉE POUR DÉTERMINER UNE CONSTANTE D'INTÉGRATION.

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}\left|\begin{array}{l}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=0\\ \ddot{z}=-g\end{array}\right.}$$

VECTEUR ACCÉLÉRATION

- D'OÙ LE SYSTÈME :

$$\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=0\\ \ddot{z}=-g\end{cases}$$

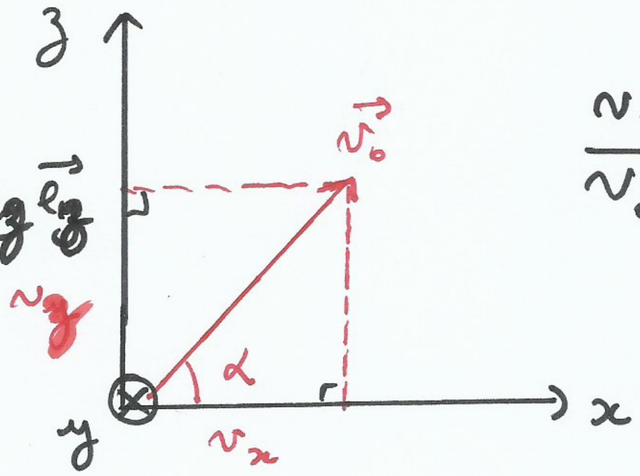
$$\Longrightarrow \begin{cases}\dot{x}(t)=C_1\\ \dot{y}(t)=C_2\\ \dot{z}(t)=-gt+C_3\end{cases}$$

- ON DÉTERMINE LES CONSTANTES D'INTÉGRATION C_1, C_2 ET C_3 AVEC LA COND. INITIALE SUR LA VITESSE.

E2

À $t=0$: $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \, \vec{e}_x + v_0 \sin\alpha \, \vec{e}_z$

$\vec{v}_0 = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$



$$\frac{v_x}{v_0} = \cos\alpha$$

$$\frac{v_z}{v_0} = \sin\alpha$$

<u>DONC</u> : $\vec{v}(t=0)$ A POUR COORDONNÉES $\begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ 0 \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

ET $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) = C_1 \\ \dot{y}(0) = C_2 \\ \dot{z}(0) = -g \times 0 + C_3 = C_3 \end{pmatrix}$

EN COMPARANT LES 2 EXPRESSIONS :

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = 0 \\ C_3 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

D'OÙ : $$\boxed{\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.}$$

VECTEUR VITESSE À TOUT INSTANT t

- ON EN DÉDUIT LES COORDONNÉES DU VECTEUR POSITION (AUTREMENT DIT LES ÉQUATIONS HORAIRES DU MOUVEMENT) EN INTÉGRANT DE NOUVEAU PAR RAPPORT À t :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0 \cos\alpha \; t + C_4 \\ y(t) = C_5 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \; t + C_6 \end{array} \right.$$

- ON DÉTERMINE LES CONSTANTES D'INTÉGRATION C_4, C_5 ET C_6 AVEC LA CONDITION INITIALE SUR LA POSITION $\overrightarrow{OM_0} = \vec{0}$ CAR OBJET AU POINT O.

$$\begin{cases} v_0 \cos\alpha \times 0 + C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ -\frac{1}{2} g \times 0^2 + v_0 \sin\alpha \times 0 + C_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$$

- ON ABOUTIT AINSI AUX ÉQUATIONS HORAIRES DU MOUVEMENT (= COORDONNÉES DU VECTEUR POSITION $\overrightarrow{OM}$ EN FONCTION DU TEMPS)

$$\boxed{\vec{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0 \cos\alpha \; t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \; t \end{array} \right.}$$

• REMARQUE : LE FAIT QUE $y(t)$ SOIT CONSTANTE MONTRE QUE LE MOUVEMENT EST PLAN. IL SE PRODUIT DANS LE PLAN $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ D'ÉQUATION $y = 0$.

(2) ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA TRAJECTOIRE

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = v_0 \cos\alpha \; t & (1) \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \; t & (2) \end{array} \right.$$

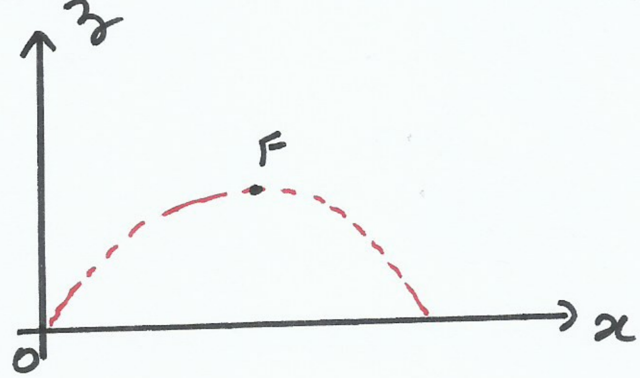
$$\left\{ \begin{array}{ll} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} & (1) \\ z = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \right) & (2) \end{array} \right.$$

(2) CONDUIT À :

$$\boxed{z = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \, x}$$

. CETTE ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA TRAJECTOIRE EST DE LA FORME $z = ax^2 + bx + c$ OÙ

$a = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} < 0 \implies$ PARABOLE DONT LA CONCAVITÉ EST VERS LE BAS.



(3) DÉTERMINONS LA FLÈCHE = POINT LE + HAUT ATTEINT

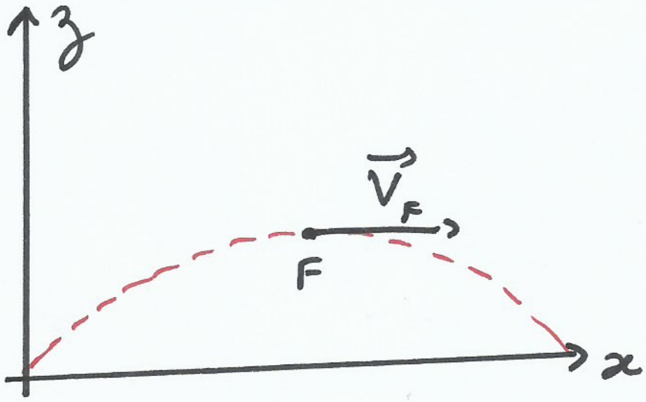
- ON UTILISE LES ÉQUATIONS HORAIRES DE $\vec{v}$ ET $\vec{OM}$

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right. \quad \text{ET} \quad \vec{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) = v_0 \cos\alpha \, t \\ \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t \end{array} \right.$$

- DÉTERMINE LA DATE t_F À LAQUELLE L'OBJET ATTEINT LE POINT F.

→ IL Y A 2 FAÇONS ÉQUIVALENTES DE LE VOIR :

* LA VITESSE ÉTANT TANGENTE À LA TRAJECTOIRE, ELLE EST HORIZONTALE AU POINT F :



. CECI IMPLIQUE : $\dot{z}(t_F) = 0$

$$-g\,t_F + v_0 \sin\alpha = 0$$

$$t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

. ON PEUT ALORS EN DÉDUIRE L'ALTITUDE DE LA FLÈCHE F :

$$z(t_F) = -\frac{1}{2} g\, t_F^2 + v_0 \sin\alpha\, t_F$$

où $t_F = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$$z(t_F) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)$$

$$\boxed{z(t_F) = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

ALTITUDE DE LA FLÈCHE F DE LA TRAJECTOIRE.

* UNE AUTRE FAÇON DE COMMENCER LE RAISONNEMENT :

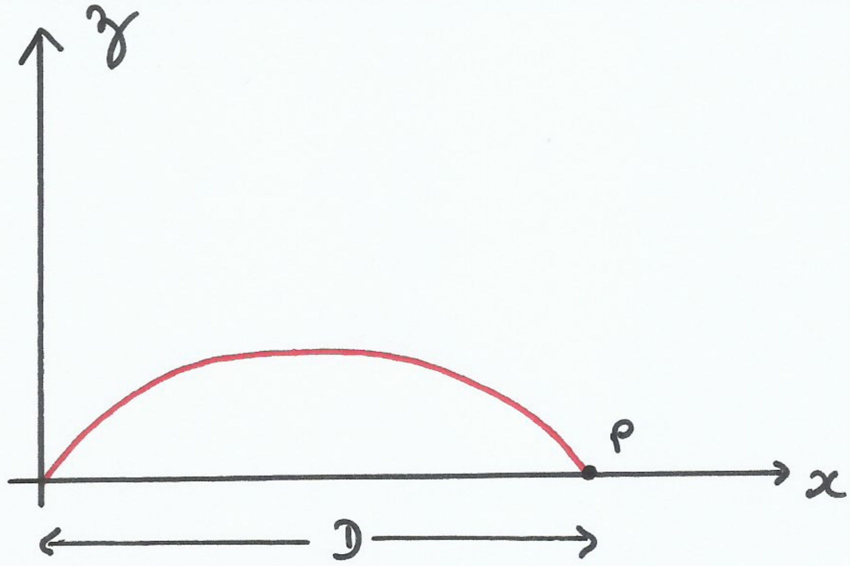
AU POINT F L'ALTITUDE z EST MAXIMALE.

DONC COMME $z(t_F)$ EST UN EXTREMUM, $\dot{z}(t_F) = 0$

→ LA SUITE DES CALCULS EST ENSUITE IDENTIQUE À LA PREMIÈRE MÉTHODE.

<u>REMARQUE</u> : LA FORMULE $z(t_F) = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ MONTRE QUE PLUS α EST GRAND, PLUS L'OBJET VA HAUT, PUISQUE $\sin\alpha$ EST UNE FONCTION CROISSANTE DE α SUR L'INTERVALLE $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

(4) <u>DÉTERMINONS LA PORTÉE</u> : DISTANCE D HORIZONTALE PARCOURUE PAR L'OBJET AU COURS DE SON MOUVEMENT.



. CETTE FOIS ON UTILISE L'ÉQUATION CARTÉSIENNE :

$$z(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \, x$$

EN $x = D$: $z(D) = 0$

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} D^2 + \tan\alpha \, D = 0$$

$$D \left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} D + \tan\alpha \right) = 0$$

OR : $D \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} D + \tan\alpha = 0$$

$$\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} D = \tan\alpha$$

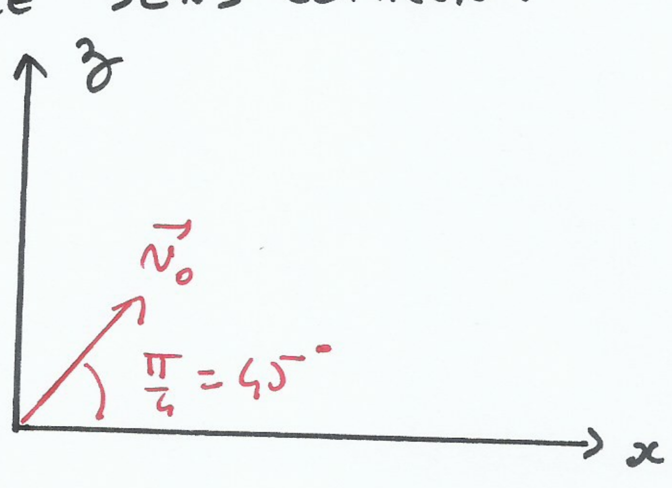
$$D = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$D = \frac{v_0^2}{g} \times 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)}$$

PORTÉE

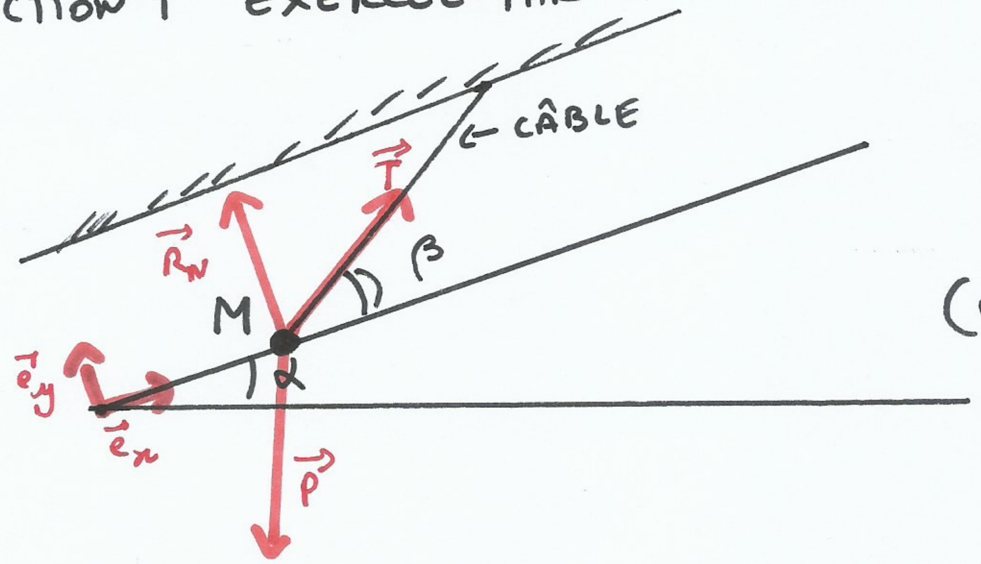
<u>REMARQUE</u> : SACHANT QUE $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, D EST MAXIMALE POUR $2\alpha = \frac{\pi}{2} \iff \alpha = \frac{\pi}{4}$ → EN ACCORD AVEC LE "SENS COMMUN".



5. EXEMPLE D'APPLICATION 4 : DÉTERMINATION DE L'INTENSITÉ D'UNE FORCE DANS LE CAS D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME.

- UN SKIEUR M REMONTE À TÉLESKI UNE PENTE D'ANGLE α. LA PERCHE À LAQUELLE IL EST ACCROCHÉ FAIT UN ANGLE β AVEC LA PENTE. SA MASSE $= m$.
- ON NÉGLIGE LES FROTTEMENTS SKIEUR/NEIGE ET SKIEUR/AIR.
- LA REMONTÉE EN TÉLÉSKI S'EFFECTUE À VITESSE CONSTANTE EN LIGNE DROITE (M.R.U.)

<u>BUT</u> : DÉTERMINER L'INTENSITÉ DE LA FORCE DE TRACTION $\vec{T}$ EXERCÉE PAR LA PERCHE SUR LE SKIEUR.



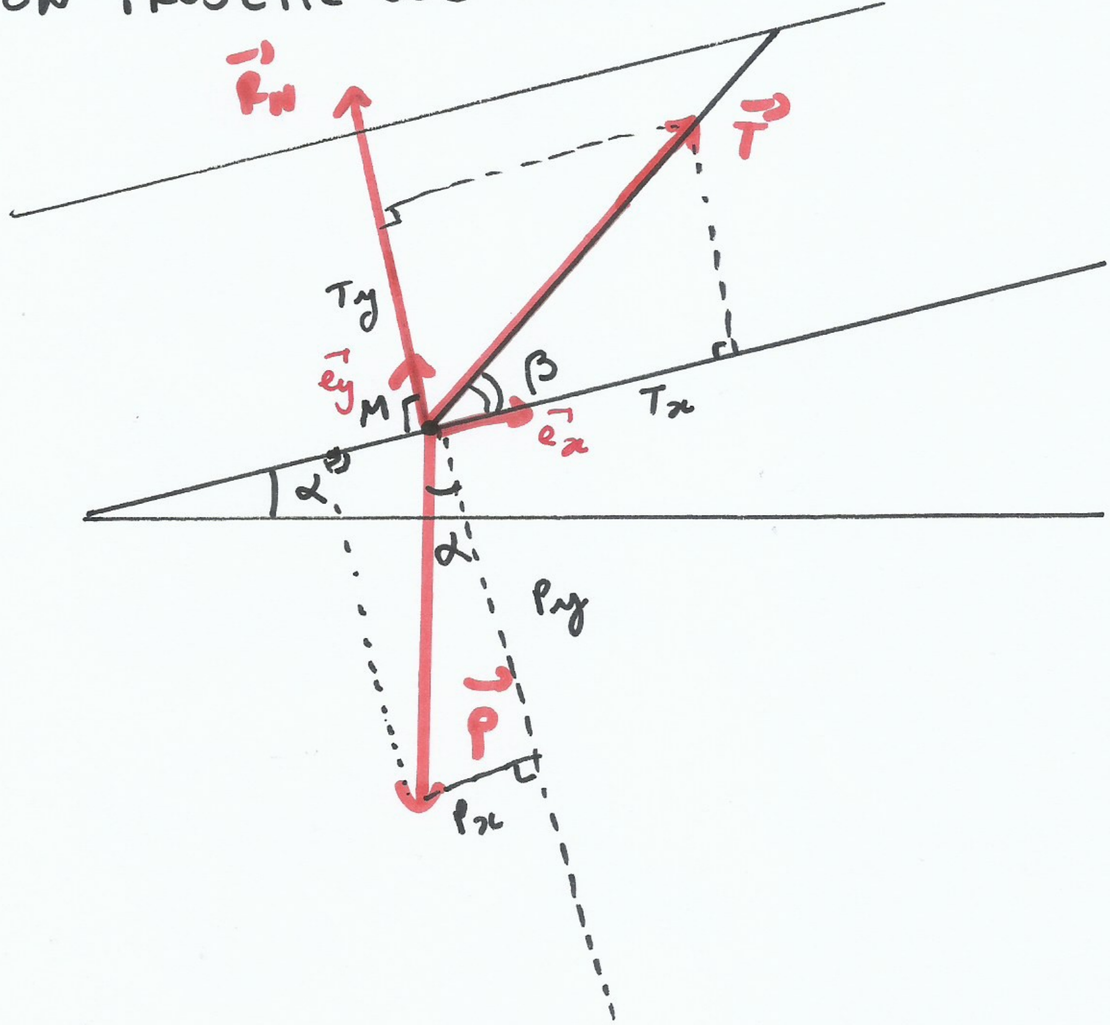
SKIEUR ASSIMILÉ À UN POINT M (MÉCANIQUE DU POINT)

M.R.U. DE M DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE SUPPOSÉ GALILÉEN $\Rightarrow$ ON APPLIQUE LA PREMIÈRE LOI DE NEWTON QUI EST UNE CONSÉQUENCE DE LA DEUXIÈME.

$$m\underbrace{\vec{a}}_{=\vec{0}} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N}$$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R_N} = \vec{0}$$

. ON PROJETTE LES FORCES DANS LA BASE $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$:



. POUR $\vec{T} = T_x \vec{e_x} + T_y \vec{e_y}$

* $\dfrac{|T_x|}{\|\vec{T}\|} = \cos\beta$ AVEC $T_x > 0$

$$\Rightarrow \frac{T_x}{\|\vec{T}\|} = \cos\beta \Rightarrow T_x = \|\vec{T}\| \cos\beta$$

$* \quad \dfrac{|T_y|}{\|\vec{T}\|} = \sin\beta$ AVEC $T_y > 0$

$\Rightarrow \dfrac{T_y}{\|\vec{T}\|} = \sin\beta \Rightarrow T_y = \|\vec{T}\| \sin\beta$

D'où : $\vec{T} = \|\vec{T}\| \cos\beta \, \vec{e_x} + \|\vec{T}\| \sin\beta \, \vec{e_y}$

- <u>POUR $\vec{P}$</u> : $\vec{P} = P_x \vec{e_x} + P_y \vec{e_y}$

$* \quad \dfrac{|P_x|}{\|\vec{P}\|} = \sin\alpha$ AVEC $P_x < 0 \Rightarrow |P_x| = -P_x$

$$\frac{-P_x}{\|\vec{P}\|} = \sin\alpha \Longrightarrow P_x = -\|\vec{P}\| \sin\alpha$$

$$P_x = -mg \sin\alpha$$

$* \quad \dfrac{|P_y|}{\|\vec{P}\|} = \cos\alpha$ AVEC $P_y < 0 \Rightarrow |P_y| = -P_y$

$$\frac{-P_y}{\|\vec{P}\|} = \cos\alpha \Longrightarrow P_y = -\|\vec{P}\| \cos\alpha$$

$$P_y = -mg \cos\alpha$$

D'où : $\vec{P} = -mg \sin\alpha \, \vec{e_x} - mg \cos\alpha \, \vec{e_y}$

POUR $\vec{R_N}$: $\vec{R_N} = R_N \vec{e_y}$

- ON PEUT ALORS RÉÉCRIRE LA PREMIÈRE LOI DE NEWTON :

$$-mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y} + \|\vec{T}\|\cos\beta\,\vec{e_x} + \|\vec{T}\|\sin\beta\,\vec{e_y} + R_N\vec{e_y} = \vec{0}$$

- OU ENCORE :

$$\begin{pmatrix} -mg\sin\alpha + \|\vec{T}\|\cos\beta \\ \\ -mg\cos\alpha + \|\vec{T}\|\sin\beta + R_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

CE QUI CONDUIT À 2 ÉQUATIONS :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + \|\vec{T}\|\cos\beta = 0 & (1) \\ \\ -mg\cos\alpha + \|\vec{T}\|\sin\beta + R_N = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) SUFFIT POUR DÉTERMINER L'INTENSITÉ $\|\vec{T}\| = T$ DE LA FORCE $\vec{T}$ DE TRACTION

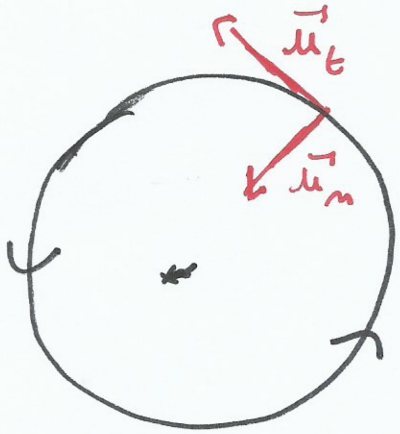
$$-mg\sin\alpha + T\cos\beta = 0$$

$$\boxed{T = \frac{mg\sin\alpha}{\cos\beta}}$$

III. CAS DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES : LA BASE DE FRÊNET

. LA BASE DE FRÊNET VUE EN T.S. EST UN CAS PARTICULIER DE LA BASE CYLINDRIQUE QUI SERA ÉTUDIÉE AU PREMIER SEMESTRE.

1) LA BASE DE FRÊNET



TRAJECTOIRE CIRCULAIRE DE RAYON R.

$\vec{u}_t$ ET $\vec{u}_n$ SONT UNITAIRES :

$$\|\vec{u}_t\| = \|\vec{u}_n\| = 1$$

UN MOUVEMENT CIRCULAIRE EST PLAN DONC IL SUFFIT DE 2 VECTEURS POUR LE DÉCRIRE :

* $\vec{u}_t$: VECTEUR TANGENT À LA TRAJECTOIRE DANS LE SENS DE LA VITESSE $\vec{v}$
* $\vec{u}_n$: VECTEUR NORMAL À LA TRAJECTOIRE DONC DIRIGÉ SELON LE RAYON DU CERCLE. IL EST ORIENTÉ VERS LE CENTRE.

VECTEUR VITESSE : $\vec{v} = v\,\vec{u}_t$

VECTEUR ACCÉLÉRATION : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$

⚠ NE PAS CONFONDRE $\vec{v}$ ET SA NORME v

- NE PAS CONFONDRE $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\,\vec{u}_t + \dfrac{v^2}{R}\,\vec{u}_n$ ET $\dfrac{dv}{dt}$

$\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ EST LE VECTEUR ACCÉLÉRATION ALORS QUE

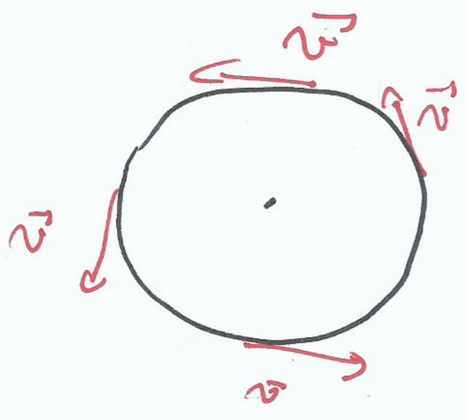
$\dfrac{dv}{dt}$ EST LA DÉRIVÉE DE LA NORME DE LA VITESSE

REMARQUE : POUR UN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME C'EST-À-DIRE AU COURS DUQUEL LA NORME v DE LA VITESSE EST CONSTANTE, ON PEUT ÉCRIRE

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

⚠ MAIS $\dfrac{d\vec{v}}{dt} \neq \vec{0}$

CAR $\vec{v}$ CHANGE DE DIRECTION COMME ON LE VOIT CI-CONTRE.



LE VECTEUR ACCÉLÉRATION S'ÉCRIT ALORS :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n \quad \text{POUR M.C.U.}$$

2) EXEMPLE D'APPLICATION : MOUVEMENT D'UN SATELLITE AUTOUR D'UN ASTRE ATTRACTEUR

• ON ÉTUDIE LE MOUVEMENT D'UN SATELLITE SUPPOSÉ PONCTUEL, DE MASSE m, AUTOUR DE LA TERRE DONT LA MASSE EST M. LE SATELLITE EST EN MVT CIRCULAIRE (RAYON R) AUTOUR DE LA TERRE.

BUTS :

(1) DÉTERMINER LA RELATION ENTRE LA NORME DE VITESSE v DU SATELLITE ET LE RAYON DE SA TRAJECTOIRE

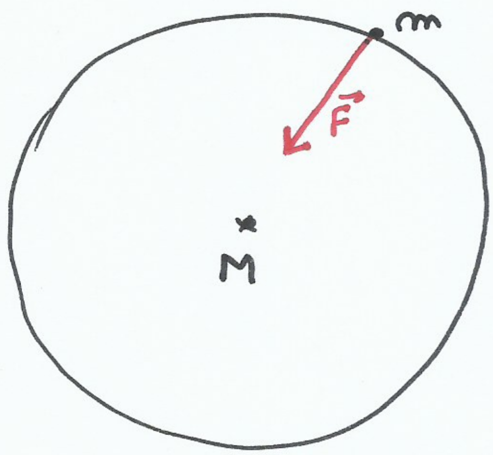
(2) DÉTERMINER LA RELATION ENTRE LE RAYON R DE LA TRAJECTOIRE ET LA PÉRIODE T DU MOUVEMENT CIRCULAIRE → 3e LOI DE KEPLER.

RÉSOLUTION :

(1) ON APPLIQUE LA 2e LOI DE NEWTON, DANS LE RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE, SUPPOSÉ GALILÉEN, AU SATELLITE :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{où} \quad \vec{F} = +G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}_n$$

$G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I. CONSTANTE UNIVERSELLE DE GRAVITATION



$$m\left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n\right) = G\frac{Mm}{R^2}\vec{u}_n$$

. CE QUI CONDUIT AUX ÉQUATIONS :

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = 0 & (1) \\ m\dfrac{v^2}{R} = \dfrac{GMm}{R^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $\frac{dv}{dt} = 0$ MONTRE QUE <u>LA NORME</u> v DU VECTEUR VITESSE $\vec{v}$ EST CONSTANTE $\Rightarrow$ IL S'AGIT D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME.

(2) $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$ RELATION ENTRE LA NORME DE LA VITESSE DU SATELLITE ET LE RAYON R DE SA TRAJECTOIRE.

(2) POUR RETROUVER LA 3: LOI DE KEPLER, ON PART DE LA DÉFINITION D'UNE PÉRIODE = TEMPS MIS POUR FAIRE UN TOUR.

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad \text{où } v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\frac{GM}{R}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 R^2 \times \frac{R}{GM}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

3: LOI DE KEPLER

M : masse de l'astre attracteur

POUR TOUS LES SATELLITES QUI TOURNENT AUTOUR D'UN MÊME ASTRE ATTRACTEUR (PAR EX. AUTOUR DE LA TERRE) LE RAPPORT $\frac{T^2}{R^3}$ EST LE MÊME.