

ANALYSE DIMENSIONNELLE : DIMENSION ET UNITÉ D'UNE GRANDEUR

- SAVOIR DÉTERMINER LA DIMENSION D'UNE GRANDEUR EST ESSENTIEL EN PHYSIQUE-CHIMIE CAR CELA PERMET DE VÉRIFIER VOIRE D'INTUIER UN RÉSULTAT.
- DÉTERMINER LA DIMENSION D'UNE GRANDEUR, C'EST TROUVER CE À QUOI ELLE EST HOMOGÈNE. AINSI, VOUS AVEZ VU EN TS QU'UNE FORCE EST HOMOGÈNE AU PRODUIT D'UNE MASSE PAR UNE DISTANCE DIVISÉS PAR UN TEMPS AU CARRÉ.

I. LE SYSTÈME INTERNATIONAL (SI)

1. LES 7 GRANDEURS DE BASE DU S.I.

- LE SI EST DÉFINI PAR 7 GRANDEURS DE BASE, C'EST-À-DIRE 7 GRANDEURS À PARTIR DESQUELLES ON PEUT EXPRIMER LA DIMENSION DE TOUTES LES AUTRES GRANDEURS PHYSIQUES ET CHIMIQUES.
- CHACUNE DE CES 7 GRANDEURS S'EXPRIME DANS UNE UNITÉ DÉFINIE PAR LE SI ET QU'IL FAUT TOUJOURS RESPECTER DANS LES CALCULS.

12

GRANDEUR	LONGUEUR L	MASSSE M	TEMPS T	INTENSITÉ ÉLEC. I	QUANTITÉ DE MATIÈRE N	TEMPÉR. θ	INT. LUM. J
UNITÉ	mètre (m)	Kilogramme (kg)	seconde (s)	ampère (A)	mole (mol)	Kelvin (K)	candela (cd)

2. LES GRANDEURS DÉRIVÉES DU S.I.

- CE SONT TOUTES LES AUTRES GRANDEURS QUI SE DÉDUISENT DES 7 GRANDEURS DE BASE DU S.I.
- POUR CERTAINES GRANDEURS DÉRIVÉES, TROUVER LEUR DIMENSION EST ÉVIDENT.
POUR D'AUTRES, IL EST NÉCESSAIRE DE FAIRE UNE ANALYSE DIMENSIONNELLE (VOIR II)
- QUELQUES GRANDEURS DÉRIVÉES DONT LA DIMENSION EST ÉVIDENTE :

- SURFACE : $\begin{cases} \text{DIMENSION: } L^2 \\ \text{UNITÉ: } m^2 \end{cases}$ Ex: $\begin{cases} S = \pi R^2 \\ S = a \times b \end{cases}$

- VOLUME : $\begin{cases} \text{DIMENSION: } L^3 \\ \text{UNITÉ: } m^3 \end{cases}$ Ex: $\begin{cases} V = \frac{4}{3} \pi R^3 \\ V = abc \end{cases}$

- VITESSE : $\begin{cases} \text{DIMENSION: } LT^{-1} \\ \text{UNITÉ: } m \cdot s^{-1} \end{cases}$ can $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

- ACCÉLÉRATION: $\begin{cases} \text{DIMENSION: } LT^{-2} \\ \text{UNITÉ: } m \cdot s^{-2} \end{cases}$ (3) $\text{car } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{OR}}{dt^2}$

3. COMMENT ÉCRIRE LA DIMENSION D'UNE GRANDEUR DÉRIVÉE

• ON NOTE ENTRE CROCHETS LA GRANDEUR DÉRIVÉE ET ON L'EXPRIME EN FONCTION DE M, L, T, I, θ , N ET J, GRANDEURS DE BASE ÉCRITES SANS CROCHETS.

* EXEMPLE: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

→ ON ÉCRIT: $[V] = L^3$

REMARQUE: LES COEFFICIENTS NUMÉRIQUES SONT SANS DIMENSION. DONC ICI " $\frac{4}{3} \pi$ " NE MODIFIE PAS L'ANALYSE DIMENSIONNELLE.

II. ANALYSE DIMENSIONNELLE: COMMENT DÉTERMINER LA DIMENSION D'UNE GRANDEUR DÉRIVÉE

1) PRINCIPE GÉNÉRAL

• LORSQUE LA DIMENSION D'UNE GRANDEUR NE "SAUTE PAS AUX YEUX", IL FAUT TROUVER UNE ÉGALITÉ

ISSUE D'UNE DÉFINITION OU D'UNE LOI DE LA PHYSIQUE (4)
OU DE LA CHIMIE POUR FAIRE APPARAÎTRE CETTE
DIMENSION.

2) EXEMPLES

a) DIMENSION D'UNE ÉNERGIE

- IL EXISTE DE NOMBREUSES FORMES D'ÉNERGIE OU D'ÉCHANGES D'ÉNERGIE EN PHYSIQUE: ÉNERGIE CINÉTIQUE, ÉNERGIES POTENTIELLES, ÉNERGIE MÉCANIQUE (EN MÉCA), ÉNERGIE DANS UNE BOBINE, DANS UN CONDENSATEUR (EN ÉLECTRICITÉ), ÉNERGIES DE LIAISON À L'ÉCHELLE MICROSCOPIQUE... MAIS AUSSI TRAVAIL W ET TRANSFERT THERMIQUE Q QUI SONT DES ÉCHANGES D'ÉNERGIE.
- TOUTEFOIS, TOUTES CES ÉNERGIES ONT LA MÊME DIMENSION QUE L'ON VA DÉTERMINER, ET ELLES S'EXPRIMENT EN JOULE, UNITÉ QUE L'ON PEUT RÉEXPRIMER EN FONCTION DES UNITÉS DES GRANDEURS DE BASE DU S.I.
- PARTONS DE LA DÉFINITION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$[E_c] = M (L \cdot T^{-1})^2$$

$$[E_c] = ML^2 T^{-2}$$

5

• ON POURRAIT PRENDRE $E_{p, pes} = mgz$

$$\begin{aligned}[E_{p, pes}] &= [mgz] \\ &= M [g] L\end{aligned}$$

OR g EST HOMOGENE A UNE ACCELERATION :
 $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

DONC: $[E_{p, pes}] = M (LT^{-2}) L$

$$[E_{p, pes}] = ML^2 T^{-2}$$

• ON POURRAIT ÉGALEMENT PARTIR DU TRAVAIL $W_{AB}(\vec{F})$:

$$\begin{aligned}W_{AB}(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{AB} \\ &= \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos \alpha\end{aligned}$$

→ $\|\vec{F}\|$ EST HOMOGENE A MLT^{-2} (voir c)

→ $\cos \alpha$ EST SANS DIMENSION

(6)

$$[W_{AB}(\vec{F})] = MLT^{-2} \cdot L$$

$$[W_{AB}(\vec{F})] = ML^2T^{-2}$$

• UNE ÉNERGIE A POUR DIMENSION ML^2T^{-2} .

DANS LE S.I., ELLE S'EXPRIME EN JOULE (J)

ON VOIT QUE: $1 \text{ JOULE} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

6) DIMENSION D'UNE PUISSANCE

• PARTONS DE LA DÉFINITION D'UNE PUISSANCE MOYENNE:

$$P_m = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t}$$

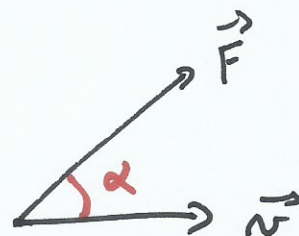
$$[P_m] = \frac{[W_{AB}(\vec{F})]}{T}$$

$$[P_m] = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$$

$$[P_m] = ML^2 T^{-3}$$

• ON RETROUVE LE MÊME RÉSULTAT À PARTIR DE LA PUISSANCE INSTANTANÉE:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



$$P = \|\vec{F}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha \quad \text{où } \cos \alpha \text{ EST SANS DIMENSION}$$

$$[P] = MLT^{-2} \times LT^{-1}$$

$$[P] = ML^2 T^{-3}$$

• UNE PUISSANCE A POUR DIMENSION $ML^2 T^{-3}$.

DANS LE S.I., ELLE S'EXPRIME EN WATT (W).

ON VOIT QUE

$$1 \text{ WATT} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$$

c) DIMENSION D'UNE FORCE

• CETTE FOIS ON NE PART D'UNE DÉFINITION, CONNE AUX a) ET b) MAIS D'UNE LOI DE LA PHYSIQUE: LA 2^e LOI DE NEWTON.

$$m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{ext}$$

REMARQUE: LES VECTEURS NE MODIFIENT PAS L'ANALYSE DIMENSIONNELLE.

$$[FORCE] = M \cdot [ACCÉLÉRATION]$$

$$[FORCE] = M L T^{-2}$$

• UNE FORCE A POUR DIMENSION MLT^{-2} .

DANS LE SI., ELLE S'EXPRIME EN NEWTON (N).

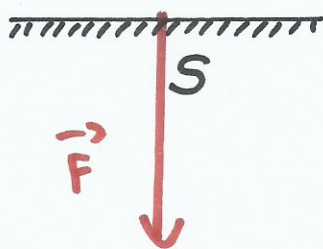
ON VOIT QUE $1 \text{ NEWTON} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

d) DIMENSION D'UNE PRESSION

• ON PART DE LA DÉFINITION DE LA PRESSION:

— SOIT UNE FORCE $\vec{F}$ QUI S'EXERCE SUR UNE SURFACE S , PERPENDICULAIREMENT À CELLE-CI.

ON APPELLE PRESSION P
LA GRANDEUR



$$P = \frac{F}{S} \quad \text{où } F \text{ EST LA NORME DE } \vec{F}$$

LA PRESSION EST LA FORCE EXERCÉE PAR UNITÉ DE SURFACE. AINSI:

$$[P] = \frac{[F]}{[S]}$$

$$[P] = \frac{MLT^{-2}}{L^2}$$

$$[P] = ML^{-1}T^{-2}$$

• UNE PRESSION A POUR DIMENSION $ML^{-1}T^{-2}$.

DANS LE S.I., ELLE S'EXPRIME EN PASCAL (P_a)

ON VOIT QUE

$$1 P_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

REMARQUE: LA PRESSION ATMOSPHERIQUE EST VOISINE DE $1 \text{ bar} = 10^5 P_a$.

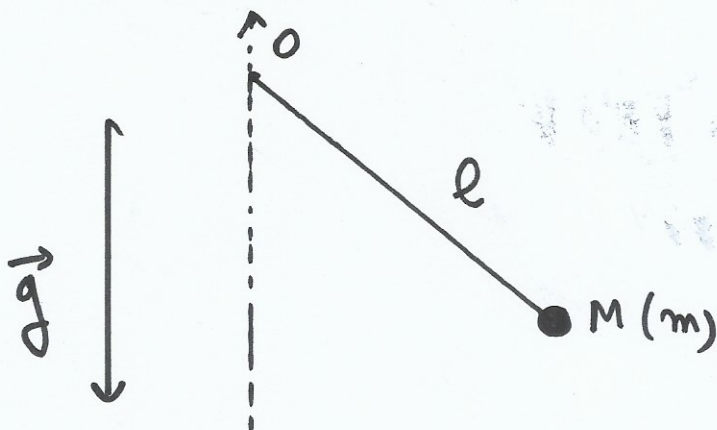
⚠ C'EST LE PASCAL QUI EST L'UNITÉ DU SI ET QU'IL FAUT DONC UTILISER POUR LES CALCULS.

III. L'ANALYSE DIMENSIONNELLE : UN OUTIL POUR DÉTERMINER UNE FORMULE (À UN FACTEUR NUMÉRIQUE PRÈS) OU POUR VÉRIFIER LA COHÉRENCE D'UNE EXPRESSION LITTÉRALE

1) DÉTERMINER UNE FORMULE (À UN FACTEUR PRÈS) PAR ANALYSE DIMENSIONNELLE

- IDÉE GÉNÉRALE : ON EXPRIME LA GRANDEUR RECHERCHÉE EN FONCTION DES GRANDEURS DE BASE.
- UN EXEMPLE : PÉRIODE DU PENDULE SIMPLE

— SOIT UNE MASSE m SUSPENDUE À UN FIL DE LONGUEUR l DANS UN PLAN VERTICAL.



- BUT : DÉTERMINER À UN FACTEUR NUMÉRIQUE PRÈS (QUI EST SANS DIMENSION) L'EXPRESSION DE LA PÉRIODE T DU PENDULE, C'EST-À-DIRE LE TEMPS MIS PAR LE PENDULE POUR FAIRE 1 ALLER-RETOUR.

$\mathcal{T}$ s'exprime a priori en fonction de g , l et m .

$\Rightarrow$ ON CHERCHE $\mathcal{T}$ SOUS LA FORME : $\mathcal{T} = k l^\alpha m^\beta g^\gamma$
OÙ k EST UNE CONSTANTE MULTIPLICATIVE (= UN NOMBRE SANS DIMENSION) ET OÙ α , β ET γ SONT DES NOMBRES À DÉTERMINER PAR ANALYSE DIMENSIONNELLE.

$\mathcal{T}$ EST LA PÉRIODE DES OSCILLATIONS DU PENDULE DONC :

$$[\mathcal{T}] = T$$

$$[k l^\alpha m^\beta g^\gamma] = T$$

$$L^\alpha M^\beta [g]^\gamma = T \quad \text{CAR } k \text{ sans dimension}$$

$$L^\alpha M^\beta (LT^{-2})^\gamma = T \quad \text{car } g \text{ homogène à une accélération}$$

$$L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma} = T$$

$$L^{\alpha+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma} = T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \delta = -1/2 \\ \alpha = +1/2 \end{cases}$$

D'où :

$$T = k l^{1/2} m^0 g^{-1/2}$$

$$T = k \sqrt{l} \times \frac{1}{\sqrt{g}}$$

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

REMARQUE : UNE DÉTERMINATION COMPLÈTE DE T (VUE AU SEMESTRE 1) CONDUIT À $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

• UNE SIMPLE ANALYSE DIMENSIONNELLE NOUS A PERMIS D'ÉTABLIR LA DÉPENDANCE DE T EN l ET g , ET DE MONTRER QUE T NE DÉPEND PAS DE m DANS CE MODÈLE QUI NÉGLIGE LES FROTTEMENTS.

2) VÉRIFIER LA COHÉRENCE D'UNE EXPRESSION

• QUAND ON ABOUTIT À UNE EXPRESSION LITTÉRALE, IL EST IMPORTANT D'EN VÉRIFIER LA COHÉRENCE PHYSIQUE ET DIMENSIONNELLE.

PRENONS QUELQUES EXEMPLES DE RELATIONS
ÉTABLIES AUX CHAPITRES 1 ET 2.

13

* CHAPITRE 1, P. 7: POUSSEE D'ARCHIMÈDE

$$\pi_a = \mu_f \times V_{\text{objet}}^{\text{imm}} \times g$$

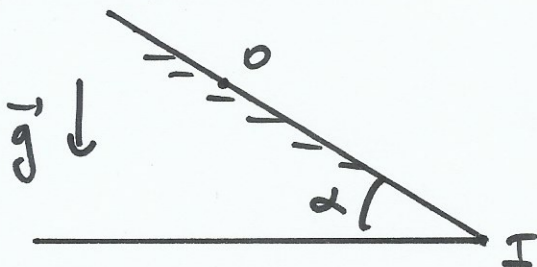
$$[\pi_a] = [\mu_f] \times [V_{\text{objet}}^{\text{imm}}] \times [g]$$

$$= M.L^{-3} \times L^3 \times L.T^{-2}$$

$$= M.L.T^{-2}$$

⇒ LA NORME DE LA POUSSEE D'ARCHIMÈDE EST BIEN
HOMOGÈNE À UNE FORCE.

* CHAPITRE 1, P. 16: VITESSE ATTEINTE PAR UN OBJET EN BAS
D'UNE PENTE.



$$\text{ON A ÉTABLI : } \dot{x}(t_f) = \sqrt{2gd \sin \alpha}$$

$$[\dot{x}(t_f)] = \sqrt{[g] \times L}$$

car g et
sin α sans
dimension

(24)

$$[\dot{x}(t_i)] = (L T^{-2} \cdot L)^{1/2}$$

$$= (L^2 T^{-2})^{1/2}$$

$$= L T^{-1}$$

$\Rightarrow \dot{x}(t_i)$ EST BIEN HOMOGENE A UNE VITESSE.

* CHAPITRE 1, P. 27: ALTITUDE DE LA FLECHE DE LA TRAJECTOIRE

$$z(t_f) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$[z(t_f)] = \frac{[v_0^2]}{[g]} \quad \underline{\text{CAR}} \quad \sin^2 \alpha \text{ ET } 2 \text{ SONT SANS DIMENSION}$$

$$= \frac{(L T^{-1})^2}{L T^{-2}}$$

$$= \frac{L^2 T^{-2}}{L T^{-2}}$$

$$= L$$

$\Rightarrow z(t_f)$ EST BIEN HOMOGENE A UNE DISTANCE.

* CHAPITRE 2, P. 3: ON A DONNÉ COMME FORMULE

15

DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE $E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$.

VÉRIFIONS QUE CETTE EXPRESSION EST BIEN HOMOGENE
À UNE ÉNERGIE.

$$[E_{p, \text{élas}}] = \left[\frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \right]$$

$$= [k] \times [(l - l_0)^2] \quad \text{CAR } \frac{1}{2} \text{ SANS DIMENSION}$$

$$\text{OR: } [k] = \frac{[\text{FORCE}]}{L} \quad \text{car} \begin{cases} \vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{e_L} \\ \Rightarrow \|\vec{F}\| = k |l - l_0| \\ k = \frac{\|\vec{F}\|}{|l - l_0|} \end{cases}$$

$$[k] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2}$$

$$\text{AINSI: } [E_{p, \text{élas}}] = MT^{-2} \times L^2$$

$$[E_{p, \text{élas}}] = ML^2 T^{-2}$$

BIEN HOMOGENE
À UNE ÉNERGIE