DM 19

à rendre le mercredi 3 avril 2024

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$ et les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$F = \{U \in E;\ AU = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{U \in E;\ A^2U = -U\}.$$

1. a) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de E.
On ne demande pas de vérifier que F est un sous-espace de E.
b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

2. Cette question est indépendante de la précédente.
a) Justifier que, pour tout $U \in G$, on a $AU \in G$.
b) Montrer que si $U \in G$ est non nul, alors (U, AU) est libre.
c) On suppose qu'il existe U et V dans G tels que (U, V, AU) soit libre.
Montrer alors que (U, V, AU, AV) est libre
d) Si G est non réduit au vecteur nul, montrer que la dimension de G est paire.