Corrigé du DM 21

Application linéaire

1. a) Soit $x \in E$; comme $(a, f(a), f^2(a))$ est une base de E alors il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $x = \alpha a + \beta f(a) + \gamma f^2(a)$. Par linéarité de f on a :

$$f^3(x) = \alpha f^3(x) + \beta f^4(x) + \gamma f^5(a) = \alpha f^3(x) + \beta f(f^3(x)) + \gamma f^2(f^3(a))$$

Or $f^3(a) = a$, donc $f^3(x) = \alpha a + \beta f(a) + \gamma f^2(a) = x$.
Ainsi, $\boxed{f^3 = \mathrm{Id}_E.}$

b) Il vient : $f^2 \circ f = f \circ f^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc f est bijective d'application réciproque f^2.
Comme f est linéaire, $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } f^{-1} = f^2.}$

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $f(0_E) = 0_E$ et $\lambda 0_E = 0_E$ donc $0_E \in E_\lambda$ et $E_\lambda \neq \emptyset$.
- Soit $u, v \in E_\lambda$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$$

donc $\alpha u + \beta v \in E_\lambda$, E_λ est stable par combinaison linéaire.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C},\ E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe une vecteur $u \in E$ non nul tel $f(u) = \lambda u$. D'après 1a), il vient :

$$u = f^3(u) = f(f(f(u))) = f(f(\lambda u)) = \lambda f(f(u)) = \lambda f(\lambda u) = \lambda^2 f(u) = \lambda^3 u$$

Donc $(1 - \lambda^3)u = 0_E$. Comme $u \neq 0_E$ alors $1 - \lambda^3 = 0_{\mathbb{C}}$.
Ainsi, $\boxed{\text{s'il existe } x \in E\backslash\{0_E\} \text{ tel que } f(x) = \lambda x \text{ alors } \lambda^3 = 1.}$

c) Soit λ tel que $\lambda^3 = 1$. Cherchons $x = \alpha a + \beta f(a) + \gamma f^2(a) \in E$ (décomposé dans la base proposée) tel que $f(x) = \lambda x$. Rappelons que $f^3 = f$.

$$\begin{aligned}
f(x) = \lambda x \quad & \Leftrightarrow \quad \alpha f(a) + \beta f^2(a) + \gamma a = \lambda\alpha a + \lambda\beta f(a) + \lambda\gamma f^2(a) \\
& \qquad \text{par identification des coordonnées} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \lambda\beta \\ \beta = \lambda\gamma \\ \gamma = \lambda\alpha \end{cases} \\
& \qquad \text{en remontant le système, on trouve} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \lambda^3\alpha \\ \beta = \lambda^2\alpha \\ \gamma = \lambda\alpha \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = \lambda^2\alpha \\ \gamma = \lambda\alpha \end{cases} \qquad \text{car } \lambda^3 = 1
\end{aligned}$$

donc $E_\lambda = \left\{\alpha(a + \lambda^2 f(a) + \lambda f^2(a);\ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$ et $x_\lambda = a + \lambda^2 f(a) + \lambda f^2(a)$.
Ainsi, $\boxed{E_\lambda = \mathrm{Vect}(a + \lambda^2 f(a) + \lambda f^2(a)) \text{ avec } \lambda \in \left\{1; e^{i\frac{2\pi}{3}}; e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}.}$

Intégration sur un segment

1. $F(0) = 0$ et $F(1) = \ln(2)$ donc F est définie et positive en 0 et en 1.
Soit $x \in]0,1[$, alors $0 < x^2 < x < 1$ et ln est continue sur $[x^2, x]$ et ne s'annule pas.
Ainsi, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $[x^2, x]$, donc l'intégrale est définie en x.
Donc F est définie sur $[0, 1]$. De plus,

$$\forall t \in [x^2, x],\ \frac{1}{\ln(t)} < 0$$

La croissance de l'intégrale donne :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} \mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^{x} 0 \mathrm{d}t = 0$$

Et donc, en multipliant les membres de cette inégalité par -1 : $F(x) \geq 0$.
Ainsi $\boxed{F \text{ est définie et positive sur } [0,1]}$.

2. a) On remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est de la forme $\dfrac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = \ln(t)$; ainsi, une primitive sur $]0, 1[$, est $t \mapsto \ln(|\ln(t)|) = \ln(-\ln(t))$. Donc pour $x \in]0, 1[$,

$$\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = [\ln(-\ln(t))]_{x^2}^{x} = \ln(-\ln(x)) - \ln(-\ln(x^2)) = \ln\left(\frac{-\ln(x)}{-\ln(x^2)}\right) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{2\ln(x)}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{t\ln(t)} = -\ln(2)}$.

b) Soit $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} 0 < x^2 \leq t \leq x < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{t\ln(t)} \leq \frac{t}{t\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t\ln(t)} \text{ car } t\ln(t) < 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t\ln(t)} \end{aligned}$$

Or $t \mapsto \dfrac{x}{t\ln(t)}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{x^2}{t\ln(t)}$ sont continues sur $[x^2, x]$, alors la croissance de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \quad &\Leftrightarrow \quad x\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq -F(x) \leq x^2 \int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \\ &\qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &\Leftrightarrow \quad -x\ln(2) \leq -F(x) \leq -x^2\ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)}$.

3. a) Comme cela a été vu à la question 1, $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0, 1[$, ainsi, elle possède une primitive : notons g une telle primitive. Pour $x \in]0, 1[$, on a :

$$F(x) = -[g(t)]_{x^2}^{x} = -(g(x) - g(x^2)) = g(x^2) - g(x)$$

De plus, g est, par définition, de classe $\mathcal{C}^1$ sur]0,1[.
L'application $x \mapsto x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ à valeur dans $]0, 1[$. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que $x \mapsto g(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.
Finalement, par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,

$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1\text{, en particulier dérivable, sur }]0,1[}$.

b) Il reste à établir la continuité de F en 0 et en 1 puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, d'après 3a), et donc en particulier continue sur $]0,1[$.

• Étude de la continuité en 0 : on sait déjà que $F(0)=0$.
Considérant l'inégalité obtenue au 2b) : $\lim_{x\to 0} x^2\ln(2)=0$ et $\lim_{x\to 0} x\ln(2)=0$.
Le théorème des encadrements donne que F admet 0 pour limite finie en 0^+ :

$$\lim_{x\to 0} F(x)=0=F(0)$$

Donc F est continue en 0.
⇛ *Ici, il est inutile de préciser que l'on s'intéresse uniquement à la limite à droite car la fonction est uniquement définie à droite de 0.*

• Étude de la continuité en 1 : on sait déjà que $F(1)=\ln(2)$.
De même, par encadrement sur l'inégalité obtenue en 2b), f admet une limite finie en 1 et cette limite est $\ln(2)$. Ainsi, F est continue en 1.

Ainsi, $\boxed{F \text{ est continue sur } [0,1]}$.

c) D'après le travail effectué en 3a), pour $x\in]0,1[$,

$$F(x)=g(x^2)-g(x) \quad\Rightarrow\quad F'(x)=2xg'(x^2)-g'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln(x)}=\frac{x-1}{\ln(x)}$$

Ainsi $\boxed{\forall x\in]0,1[,\quad F'(x)=\frac{x-1}{\ln(x)}}$.

On sait déjà que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, d'après ce qui a été fait en 3a).
Étudions la limite de F' sur les bornes de l'intervalle afin de mettre en oeuvre le théorème de prolongement des applications de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\ln(x)}=0 \text{ par opération sur les limites (pas de forme indéterminée)}$$

On sait que $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$. Or $\lim_{x\to 1} x-1=0$, par composition de limites :

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}\underset{x\to 1}{\longrightarrow}1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(x)}=1$$

F est continue sur $[0,1]$ et F' est continue sur $]0,1[$ et admet des limites finies en 0 et en 1. Ainsi, par prolongement F est dérivable en 0 et en 1 et $F'(0)=\lim_{x\to 0}F'(x)=0$, $F'(1)=\lim_{x\to 1}F'(x)=1$.
Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ en particulier $\boxed{F' \text{ est continue sur } [0,1]}$.

4. La fonction $t\mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}=F'(t)$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1, elle est donc continue par morceaux sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t=[F(t)]_0^1=F(1)-F(0)=\ln(2)}$$