DM 23

à rendre le mardi 14 mai 2024

Entropie d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète finie (vad finie) ; on note $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. L'entropie de X est définie par :

$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}[X = x] \ln\big(\mathbf{P}[X = x]\big) = -\sum_{i=0}^{n} p_X(x_i) \ln\big(p_X(x_i)\big),$$

où p_X est la loi de X.
On supposera toujours que, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}[X = x] > 0$.

Partie A - Premiers exemples

1. Montrer que, pour toute vad finie X, on a

$$(i) : \quad \mathcal{H}(X) \geq 0 \quad \text{et} \quad (ii) : \mathcal{H}(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ est constante}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$. On note h_n l'entropie de X. Montrer que :

$$h_n = \ln(n + 1).$$

3. Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. On note $f(p)$ l'entropie de X.

a) Exprimer $f(p)$ en fonction de p.
b) Pour quelle valeur de p, $f(p)$ est-elle maximale ?
c) Comparer, pour tout $p \in]0, 1[$, $f(p)$ et h_1.

Partie B - Entropie de la loi du premier succès

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers étant supposés indépendants. On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient jamais *pile* au cours des n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier *pile*.

4. a) Déterminer $X(\Omega)$.

b) Pour tout $k \in X(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}[X = k]$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
c) La fonction suivante simule la variable X. On suppose que l'instruction `rand()` est chargée ; elle renvoie un nombre au hasard entre 0 et 1.

```python
def X(n):
    r=rand()
    y=...
    while r>0.5 and y<n:
        r=rand()
        y=...
    if y==n and r>0.5:
        return ...
    else:
        return ...
```

(i) Recopier les lignes à compléter :
(ii) A quel évènement correspond le test `r>0.5`.

5. On pose, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

a) Calculer, pour tout $x \in]0, 1[$, $F(x)$; montrer que F est dérivable et déterminer sa dérivée.
b) Déterminer l'entropie de X à l'aide du calcul de F'.
c) Comparer $\mathcal{H}(X)$ et h_n.