DM 25

à rendre le mardi 21 mai 2024

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie A

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0,1]$.
En particulier, E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
On note $N = \{f \in E_2;\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $u : \begin{array}{ccc} N & \to & E_0 \\ f & \mapsto & f'' \end{array}$.

1. Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2.
2. Montrer que u est une application linéaire injective.
3. Soit g un élément de E_0. Pour tout x de $[0,1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)dt$.

   a) Justifier que G est élément de E_1 et montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad G'(x) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^x g(t)dt - \int_x^1 g(t)dt\Big)$$

   b) En déduire que G est élément de E_2 et déterminer G''.

   c) Pour tout x de $[0,1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$.
   Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à N.

   d) Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u est surjective.

   e) Que peut-on déduire des questions 2) et 3d) ?

Partie B

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
On note $N_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X];\ P(0) = P(1) = 0\}$.
Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on pose $P_k = X^{k+1}(X-1)$.

4. Montrer que $\mathcal{C} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de N_{n+2}.
5. On considère l'application linéaire v de N_{n+2} dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à toute fonction polynomiale P de N_{n+2} associe sa dérivée seconde, notée P''.

   a) Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, déterminer $v(P_k)$ en fonction de certains des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v)$ de v relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

   On pourra noter $d_k = (k+2)(k+1)$

   b) En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   c) Simplifier, pour tout entier naturel k, la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} P_j$.

   d) En déduire la matrice A^{-1}.
6. On considère l'application w qui à tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe la dérivée seconde de $(X^2 - X)P$.

   a) Montrer que w est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   b) Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, déterminer $w(X^k)$.

   c) En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 5a).