DM 26

à rendre le mardi 28 mai 2024

Série de fonctions

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A - Calcul de $\zeta(2)$

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin\left(\frac{tm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{\frac{i(m+1)t}{2}},$$

$$\text{puis } \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos\left(\frac{(m+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{mt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) \mathrm{d}t \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. a) Montrer : pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

b) Justifier la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$, pour $n \geq 0$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie B - Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

On rappelle que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

6. a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, les séries suivantes convergent :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$$

b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

7. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

8. a) Établir : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

b) En déduire : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2$, $|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y - x|$.

c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

9. a) Montrer, pour tout couple (x, y) de $[0, +\infty[^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que : $\forall x \in [0, +\infty[$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.